

B e i t r ä g e

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Karl Georg Christian v. Staudt,

ordentl. Professor an der Universität Erlangen.

Drittes Heft.

(Schlussheft.)

Druck der A. E. Jung'schen Universitätsbuchdruckerei.

Nürnberg.

V e r l a g v o n B a u e r u n d R a s p e

(Julius Merz)

1860.

Beitrag
zur

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Carl Georg Christian von Stransky

ordentl. Professor an der Universität Erlangen

Dritter Heft

(Schlussheft)

Druck der A. E. Junge'schen Universitätsbuchdruckerei.

Verlag von

Verlag von

(Jahrgang)

18

und Raspe.

Indem die Verlagsabhandlung hienail das dritte Heft von
Staudt's „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ dem Publi-
kum überreicht, steht sie auf den Inhalt des ganzen Werkes
hinweisen zu müssen. Derselbe ist folgender:

Erstes Heft: 1. Elementargebilde. — 2. Flächen II. Ordnung. —
3. Vom Sinne der Gebilde. — 4. Involutorische Gebilde. — 5. In-
volutorische Kegelschnitte in Polarsystemen. — 6. Involutorische
Systeme. — 7. Imaginäre Elemente. — 8. Von der Menge der
Elemente. — 9. Harmonische Wälder. — 10. Homologe imaginäre
Elemente in Grundgebilden. — 11. Involutorisch zu einander
sind. — 12. Reelle Polarsysteme. — 13. Imaginäre Elemente in
reellen Elementargebilden. — 14. Gemeinschaftliche Punkte und
Tangenten zweier Curven II. Ordnung. — 15. Anwendung.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage.

Zweites Heft: 16. Projektivische Verwandtschaft zwischen einstufigen Gebilden. — 17. Pro-
jektivische Verwandtschaft zwischen Systemen. — 18. Projektivische
Verwandtschaft zwischen Elementargebilden. — 19. Systeme von
Wäldern. — 20. Produkte aus Wäldern. — 21. Polaren von Wäldern.
— 22. Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven
II. Ordnung. — 23. Linien und Strahlen II. Ordnung. —
24. Räumliche Systeme von Gebilden II. Ordnung. — 25. Curven
II. Ordnung, welche in zwei Punkten, die jedoch nicht ineinander
fallen können, sich berühren. — 26. Noch einige Sätze über Curven
II. Ordnung. — 27. Von den Werten der reellenen Wälder. —
28. Complexe Zahlen. — 29. Von den Abzissen. — 30. Besondere
Fälle von allgemeinen Sätzen. — 31. Krümmungshalbmesser.
Drittes Heft: 32. Flächen II. Ordnung. — 33. Umhüllende Linien
III. Ordnung. — 34. Elementargebilde III. und IV. Ordnung. —
35. Räumliche Systeme, welche collinear zu einander sind. —
36. Räumliche Systeme von Flächen II. Ordnung. — 37. Verschiedene
Arten von einfachen Flächensystemen. — (Linien IV. Ordnung.) —
38. Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von ein-
fachen Flächensystemen sich ergeben. — 39. Bestimmung von Flä-
chen II. Ordnung durch gegebene Punkte. — 40. Noch einige Sätze
über umhüllende Curven III. Ordnung. — 41. Vermischte Sätze. —
42. Ueber Krümmungen.

Indem die Verlagshandlung hiemit das dritte Heft von Staudt's „**Beiträgen zur Geometrie der Lage**“ dem Publikum übergibt, glaubt sie auf den Inhalt des ganzen Werkes hinweisen zu müssen. Derselbe ist folgender: .

Erstes Heft: 1. Elementargebilde. — 2. Flächen II. Ordnung. — 3. Vom Sinne der Gebilde. — 4. Involutorische Gebilde. — 5. Involutorische Regelschaaren in Polarsystemen. — 6. Involutorische Systeme. — 7. Imaginäre Elemente. — 8. Von der Menge der Elemente. — 9. Harmonische Würfe. — 10. Homologe imaginäre Elemente in Grundgebilden, welche reell-projektivisch zu einander sind. — 11. Reelle Polarsysteme. — 12. Imaginäre Elemente in reellen Elementargebilden. — 13. Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung. — Anhang.

Zweites Heft: 14. Vom Sinne. — 15. Von den Ketten. — 16. Projektivische Verwandschaft zwischen einförmigen Gebilden. — 17. Projektivische Verwandschaft zwischen Systemen. — 18. Projektivische Verwandschaft zwischen Elementargebilden. — 19. Summen von Würfeln. — 20. Produkte aus Würfeln. — 21. Potenzen von Würfeln. — 22. Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung. — 23. Linien und Strahlenbüschel II. Ordnung. — 24. Einfache Systeme von Gebilden II. Ordnung. — 25. Curven II. Ordnung, welche in zwei Punkten, die jedoch auch ineinander fallen können, sich berühren. — 26. Noch einige Sätze über Curven II. Ordnung. — 27. Von den Werthen der neutralen Würfe. — 28. Complexe Zahlen. — 29. Von den Abscissen. — 30. Besondere Fälle von allgemeinen Sätzen. — 31. Krümmungshalbmesser.

Drittes Heft: 32. Flächen II. Ordnung. — 33. Uebene Linien III. Ordnung. — 34. Elementargebilde III. und IV. Ordnung. — 35. Räumliche Systeme, welche collinear zu einander sind. — 36. Einfache Systeme von Flächen II. Ordnung. — 37. Verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen. — (Linien IV. Ordnung.) — 38. Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben. — 39. Bestimmung von Flächen II. Ordnung durch gegebene Punkte. — 40. Noch einige Sätze über uebene Curven III. Ordnung. — 41. Vermischte Sätze. — 42. Ueber Krümmungen.

I n h a l t.

	Seite
§. 32. Flächen II. Ordnung.	285—298
§. 33. Uebene Linien III. Ordnung	298—311
§. 34. Elementargebilde III. und IV. Ordnung	311—328
§. 35. Räumliche Systeme, welche collinear zu einander sind	328—333
§. 36. Einfache Systeme von Flächen II. Ordnung	333—346
§. 37. Verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen. —	
Linien IV. Ordnung	346—362
§. 38. Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben	362—366
§. 39. Bestimmung von Flächen II. Ordnung durch gegebene Punkte.	366—380
§. 40. Noch einige Sätze über uebene Curven III. Ordnung	380—382
§. 41. Vermischte Sätze	382—386
§. 42. Ueber Krümmungen	386—396

Inhalt

Seite	
285—288	§. 32. Flächen II. Ordnung.
288—311	§. 33. Lineare Flächen III. Ordnung.
311—328	§. 34. Elementargebilde III. und IV. Ordnung.
328—333	§. 35. Räumliche Systeme, welche geordnet zu einander sind.
333—346	§. 36. Flächensysteme von Flächen II. Ordnung.
346—362	§. 37. Verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen.
362—365	§. 38. Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben.
365—380	§. 39. Bestimmung von Flächen II. Ordnung durch gegebene Punkte.
380—382	§. 40. Noch einige Sätze über lineare Curven III. Ordnung.
382—386	§. 41. Vermischte Sätze.
386—396	§. 42. Ueber Krümmungen.

V o r w o r t.

Diess dritte Heft von Beiträgen zur Geometrie der Lage ist vorzugsweise den Flächen II. Ordnung gewidmet, mit deren Betrachtung aber die Betrachtung von unebenen Linien III. und IV. Ordnung im innigsten Zusammenhange steht. Die unebenen Curven III. Ordnung sind in vieler Hinsicht für den Raum. was die Curven II. Ordnung für die Ebene sind. Gleichwie nämlich jede Curve II. Ordnung zu dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel projektivisch ist, so ist jede unebene Curve III. Ordnung zu dem ihr sich anschmiegenden Ebenenbüschel projektivisch. Unter einer Regelfläche ist auch in diesem Hefte eine Fläche mit zwei, sei es nun reellen oder imaginären Regelschaaren zu verstehen. Ist in dem durch die Fläche bestimmten Polarsysteme jeder reelle Punkt einer reellen Ebene, aber keine reelle Gerade sich selbst zugeordnet, so sind alle in der Fläche liegenden Curven III. Ordnung imaginär.

Jedem einfachen Flächensysteme steht nach dem Gesetze der Reciprocität ein einfaches System von Ebenenbündeln II. Ordnung gegenüber. Besondere Fälle von Systemen XXI. und XXII. Art werden in 596 betrachtet.

Liegen die drei Punkte M, B, G in einer und derselben Geraden, welche die unendlich ferne Ebene in einem vierten Punkte H schneidet, so kann, auch wenn jene Punkte nicht sämmtlich reell sind, der Werth des Wurfes M G H B zugleich der Werth des Quotienten $\frac{MB}{MG}$ genannt werden. Wenn also eine durch den Mittelpunkt M einer Hyperbel gehende reelle Gerade die Curve in zwei imaginären Punkten B, B₁ schneidet und M G H G₁ die von M ausgehende harmonische Darstellung des Punktes B ist, so ist $\frac{MB}{MG} = i$. Jede zu der Geraden MB parallele Tangente der Curve schneidet die Asymptoten derselben in zwei Punkten, deren Abstand von einander $= 2 MG$ ist. Es geht hieraus hervor, was in 601 die Länge b für eine Bedeutung hat, wenn daselbst die imaginäre halbe Axe MB einer Hyperbel durch bi bezeichnet wird. Uebrigens wird es kaum nothwendig sein, zu bemerken, dass die 20 letzten Nummern dieses Heftes, da sie den Begriff der Grösse voraussetzen, als Anhang zu betrachten sind.

Erlangen, im März 1860.

Der Verfasser.

§. 32.

Flächen II. Ordnung.

438. In Hinsicht auf eine Kegelfläche II. Ordnung soll dem Mittelpunkte S derselben jede Ebene, einem andern Punkte P aber die Ebene zugeordnet heissen, welche in dem polären Strahlenbündel, dessen Ordnungsfläche die Kegelfläche ist, dem Strahle SP zugeordnet ist. Besteht eine Fläche II. Ordnung aus zwei Ebenen A, B , so soll in Hinsicht auf dieselbe jedem Punkte, welcher in der Schnittlinie S der beiden Ebenen liegt, jede Ebene, einem ausserhalb der Geraden S liegenden Punkte P aber die Ebene zugeordnet heissen, welche in dem involutorischen Ebenenbüschel $AA.BB...$ der Ebene SP zugeordnet ist. Wenn endlich eine Ebene A , doppelt gedacht, als eine Fläche II. Ordnung betrachtet wird, so soll in Hinsicht auf dieselbe jedem in ihr liegenden Punkte jede Ebene, jedem nicht in ihr liegenden Punkte aber die Ebene A zugeordnet heissen.

Durch eine Fläche F II. Ordnung und einen Punkt P ist entweder eine Ebene E bestimmt, welche dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnet ist, oder es ist in Hinsicht auf diese Fläche dem Punkte P jede Ebene zugeordnet. Im erstern Falle geht die Ebene E durch den Punkt P oder nicht durch den Punkt P , je nachdem dieser in der Fläche F oder ausserhalb derselben liegt. Im letztern Falle ist die Fläche F in dem Strahlenbündel P enthalten, also entweder eine Kegelfläche, welche den Punkt P zum Mittelpunkt

hat, oder der Inbegriff von zwei durch den Punkt P gehenden Ebenen oder eine durch den Punkt P gehende Ebene. — In einem Ebenenbüschel S ist eine Fläche II. Ordnung enthalten, wenn sie entweder aus zwei Ebenen des Büschels besteht oder eine Ebene des Büschels ist.

439. Zwei Punkte P , Q sind in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung einander conjugirt, so dass nämlich der eine und daher jeder in der dem andern zugeordneten Ebene liegt, wenn die Gerade PQ entweder in der Fläche F liegt oder mit derselben nur den Punkt P oder nur den Punkt Q gemein hat oder dieselbe in zwei Punkten schneidet, welche durch die Punkte P , Q harmonisch getrennt sind. Ist einem Punkte in Hinsicht auf eine Fläche II. Ordnung jede Ebene zugeordnet, so ist ihm auch in Hinsicht auf dieselbe jeder Punkt conjugirt. Jeder in einer Fläche II. Ordnung liegende Punkt ist in Hinsicht auf dieselbe auch sich selbst conjugirt.

Einem Punkte ist in Hinsicht auf eine Fläche II. Ordnung eine Gerade conjugirt, wenn irgend zwei Punkte und also alle Punkte dieser Geraden in Hinsicht auf die Fläche jenem Punkte conjugirt sind. Durch zwei Flächen II. Ordnung und einen Punkt P , welchem nicht in Hinsicht auf beide Flächen eine und dieselbe Ebene zugeordnet ist, ist eine Gerade bestimmt, welche nämlich dem gegebenen Punkte in Hinsicht auf beide Flächen conjugirt ist. Es schneiden sich in dieser Geraden die beiden Ebenen, von welchen die eine in Hinsicht auf die eine, die andere aber in Hinsicht auf die andere der gegebenen Flächen dem Punkte P zugeordnet ist.

440. Eine Fläche F II. Ordnung und eine ausserhalb derselben liegende Gerade S schneiden sich entweder in zwei Punkten oder haben nur einen Punkt A mit einander gemein. Im erstern Falle ist unter SF der Inbegriff der beiden Schnittpunkte, im letztern aber der Punkt A , doppelt gedacht, zu verstehen. Dasselbe gilt, wenn F eine Linie II. Ordnung und S eine Gerade ist, welche nicht in der Linie F aber mit ihr in einerlei Ebene liegt.

Durch zwei Flächen F , F_1 II. Ordnung und eine Gerade S , welche durch keinen gemeinschaftlichen Punkt derselben geht, sind zwei Punkte bestimmt, welche nämlich in der Geraden S liegen und in Hinsicht auf beide Flächen einander conjugirt, also die Ordnungspunkte des involutorischen Gebildes $SF.SF_1...$ sind.

441. Durch eine Fläche F II. Ordnung und eine nicht in ihr liegende Ebene U ist eine Linie UF II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die Fläche F und die Ebene U mit einander gemein haben. Je zwei in Hinsicht auf die Linie UF einander conjugirte Punkte sind auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt. Und wenn zwei in der Ebene U liegende Punkte in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die Linie UF einander conjugirt. Ist F eine Kegelfläche, der die Ebene U sich anschmiegt, oder der Inbegriff von zwei Ebenen, durch deren Schnittlinie die Ebene U geht, oder selbst eine Ebene, so ist UF eine Gerade, welche man aber als eine Linie II. Ordnung zu betrachten hat. In allen andern Fällen ist UF entweder eine Curve oder der Inbegriff von zwei Geraden. Ist V eine andere ausserhalb der Fläche F liegende Ebene, so liegt jeder Punkt, welchen die Gerade UV mit einer der Linien UF , VF gemein hat, auch in der andern.

442. Durch eine Fläche F II. Ordnung und ein gerades Gebilde, dessen Träger nicht mit der Fläche F in einem und demselben Strahlenbündel enthalten ist, ist ein Ebenenbüschel bestimmt, welcher nämlich in Hinsicht auf die gegebene Fläche dem gegebenen geraden Gebilde zugeordnet und daher zu demselben projektivisch ist.

Ist einem geraden Gebilde $ABC\dots$ in Hinsicht auf zwei Flächen F , F_1 II. Ordnung ein und derselbe Ebenenbüschel $A_1B_1C_1\dots$ zugeordnet und U eine durch die Gerade AB gehende Ebene, so fällt entweder UF mit UF_1 zusammen, oder es bestimmen die Linien UF , UF_1 ein einfaches Liniensystem (UF, UF_1) , welchem die Gerade AB angehört und haben daher keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt mit einander gemein.

443. Durch ein Tetraeder $ABCD$, einen Punkt P , welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, und eine Ebene U ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die ihm gegenüber liegende Seite desselben, dem Punkte P aber die Ebene U zugeordnet ist.

Die Fläche F ist eine Regelfläche oder eine Kegelfläche oder der Inbegriff von zwei Ebenen oder die Ebene U , je nachdem diese Ebene durch keinen oder durch einen oder durch zwei oder durch drei Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht.

444. Durch eine Ebene U , eine in ihr liegende Linie K II. Ordnung und zwei ausserhalb der Ebene liegende Punkte P , S ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der gegebenen Ebene die gegebene Linie gemein hat und durch den erstern der gegebenen Punkte geht, während dem letztern in Hinsicht auf dieselbe die gegebene Ebene zugeordnet ist.

Liegt der Punkt Q , in welchem die Gerade SP von der Ebene U geschnitten wird, in der Linie K , so ist F die Fläche SK , welche aus dem Punkte S die Linie K projecirt. Wenn aber der Punkt Q ausserhalb dieser Linie liegt, so nehme man in der Ebene U ein Dreieck ABC an, so dass in Hinsicht auf die Linie K jedem Eckpunkte des Dreiecks die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet ist, aber keine Seite des Dreiecks durch den Punkt Q geht. Ist q die dem Punkte Q in Hinsicht auf die Linie K zugeordnete Gerade, so ist F diejenige Fläche II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCS$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben, dem Punkte P aber die Ebene Pq zugeordnet ist. In diesem Falle hat die Fläche F mit der Fläche SK nur die Linie K gemein.

445. Durch zwei Paar Gegenkanten AB , CD , AC , BD eines Tetraeders und einen Punkt P , welcher in keiner dieser Geraden liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die vier gegebenen Geraden und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in einer Seite des Tetraeders $ABCD$, so ist F der Inbegriff von zwei Ebenen. Wenn aber die Schnittlinie der Ebenen PAB , PCD keine der Geraden AC , BD schneidet, so ist F eine Regelfläche.

446. Durch zwei sich schneidende Gerade g , h , dann eine Curve K II. Ordnung, welche im Punkte gh die Ebene gh berührt aber keiner der Geraden g , h sich anschmiegt, und einen Punkt P , welcher weder in der gegebenen Curve noch in einer der gegebenen Geraden liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Linien und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene gh oder in der Ebene K , so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Wenn aber die Ebene gP die Curve K im Punkte gh und in noch einem Punkte Q schneidet

und die Gerade PQ ausserhalb der Ebene K liegt, so ist F die Regelfläche, welche (15) durch die Curve K und die beiden Geraden h , PQ geht.

447. Durch zwei sich schneidende Gerade g , h , dann eine Curve K II. Ordnung, welche mit den gegebenen Geraden nicht in einerlei Ebene liegt aber mit jeder derselben einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat, und einen Punkt P , welcher keiner der gegebenen Linien angehört, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Linien und durch den gegebenen Punkt P geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene gh oder in der Ebene K , so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Wenn aber der Punkt P in keiner der erwähnten Ebenen liegt, so sei Q derjenige Punkt der Curve K , welcher aus der Axe g durch die Ebene gP projicirt wird. Geht nun die Gerade PQ durch den Punkt gh , so ist F die Kegelfläche, welche aus diesem Punkte die Curve K projicirt. Liegen aber die Geraden h, PQ nicht in einerlei Ebene, so ist F die Regelfläche, welche durch diese beiden Linien und durch die Curve K geht.

448. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber die Schnittlinie S ihrer Ebenen entweder in denselben zwei Punkten A, B schneiden oder in einem und demselben Punkte A berühren, ist eine Gerade u bestimmt, welche nämlich der Geraden S in Hinsicht auf jede durch die beiden gegebenen Curven gehende Regelfläche zugeordnet ist.

Die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in Hinsicht auf die Curve K , der andere aber in Hinsicht auf die Curve K_1 dem geraden Gebilde S zugeordnet ist, erzeugen den diesem Gebilde in Hinsicht auf jede durch beide Curven gehende krumme Fläche II. Ordnung zugeordneten Ebenenbüschel u . Im erstern der im Satze erwähnten Fälle liegen in der Geraden u die Mittelpunkte der beiden Kegelflächen, welche in den Curven K, K_1 sich schneiden, während im letztern Falle die Gerade u den Mittelpunkt der durch die beiden Curven K, K_1 gehenden Kegelfläche mit dem Punkte A verbindet. — Geht eine Fläche II. Ordnung, in Hinsicht auf welche dem geraden Gebilde S der Ebenenbüschel u zugeordnet ist, durch die Curve K aber nicht durch die Curve K_1 , so schneidet sie die Ebene K_1 in einer andern Linie II. Ordnung, welche

dem einfachen Liniensysteme (S, K_1) angehört und daher mit der Curve K_1 keinen ausserhalb der Geraden S liegenden Punkt gemein hat.

449. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber einer Geraden S in einem und demselben Punkte A sich anschmiegen, und einen Punkt P , welcher in keiner von den beiden Curven liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene K oder in der Ebene K_1 , so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Liegt der Punkt P in der durch die beiden Curven K, K_1 gehenden Kegelfläche, so ist diese Kegelfläche, deren Mittelpunkt durch M bezeichnet werden soll, die im Satze erwähnte Fläche. Liegt der Punkt P in einer von zwei Geraden g, h , welche durch die Geraden S, AM harmonisch getrennt sind, so geht (448) die Regelfläche F , welche durch die drei Linien g, h, K und irgend einen von A verschiedenen Punkt der Curve K_1 geht, auch durch diese Linie. Wenn endlich keiner der betrachteten Fälle statt findet, so giebt es in der Ebene AMP eine durch den Punkt P gehende Curve K_2 II. Ordnung, welche im Punkte A die Gerade AM berührt, mit der Curve K noch einen Punkt B und ebenso mit der Curve K_1 noch einen Punkt B_1 gemein hat. Ist nun Q irgend ein ausserhalb der Geraden AB liegender Punkt der Curve K und S der Punkt, welcher in Hinsicht auf diese Curve der Geraden AB , mithin in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden AB_1 zugeordnet ist, so schneidet die Regelfläche F , welche in der Curve K_2 die Kegelfläche SK_2 berührt und durch den Punkt Q geht, die Ebene K in der Curve K und also (448) die Ebene K_1 in der Curve K_1 .

450. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, ist eine durch beide Curven gehende Regelfläche bestimmt, in Hinsicht auf welche die Ebenen K, K_1 einander conjugirt sind. Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt S zugeordnet, so geht die Regelfläche, welche in der Curve K_1 die Kegelfläche SK_1 berührt und mit der Curve K irgend einen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt gemein hat, auch durch diese Curve.

451. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, und einen Punkt P , welcher keiner von den beiden Curven angehört, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt S und in Hinsicht auf die Curve K_1 der Punkt S_1 zugeordnet. Liegt der Punkt P in der Ebene K oder in der Ebene K_1 , so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Liegt der Punkt P ausserhalb der Ebenen K, K_1 , aber in irgend einer von den beiden Ebenen SS_1A, SS_1B , etwa in der Ebene SS_1A , so sei h eine Gerade, welche mit AP in einerlei Ebene liegt und mit jeder von den beiden Curven K, K_1 einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat. Legt man nun durch die Geraden AP, h und die Curve K und irgend einen ausserhalb dieser Linien liegenden Punkt der Curve K_1 eine Fläche II. Ordnung, so geht dieselbe, da sie im Punkte A die Gerade AS_1 berührt, auch durch die Curve K_1 . Wenn endlich keiner der bereits betrachteten Fälle statt findet, so gibt es eine Linie K_2 II. Ordnung, welche durch den Punkt P geht und die Ebenen K, K_1 in den vier Punkten schneidet, in welchen die Curven K, K_1 von der Ebene SS_1P geschnitten werden. Ist nun M der Punkt, welcher von der Ebene SS_1P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, so ist F diejenige durch den Punkt A gehende Fläche II. Ordnung, welche in der Linie K_2 die Fläche MK_2 berührt.

452. Durch zwei Linien K, K_1 II. Ordnung, von welchen die eine in der Ebene U , die andere in einer andern Ebene U_1 liegt, keine aber mit der Schnittlinie s dieser Ebenen einen ausserhalb der andern liegenden Punkt oder mehr als zwei Punkte gemein hat, und einen ausserhalb der beiden Ebenen U, U_1 liegenden Punkt P ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K , mit der Ebene U_1 die Linie K_1 gemein hat und durch den gegebenen Punkt P geht.

Ist K eine Gerade und K_1 ebenfalls eine Gerade, so ist F entweder die Ebene KK_1 oder eine Kegelfläche, welche die Ebenen U, U_1 in den Geraden K, K_1 berührt. Ist K eine Gerade und K_1 der Inbegriff von zwei Geraden, so ist F entweder der Inbegriff von zwei Ebenen oder wieder eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt in der

Geraden ζ liegt. Dasselbe ist der Fall, wenn jede von den beiden Linien K, K_1 aus zwei Geraden besteht, deren Schnittpunkt der Geraden ζ angehört. Ist K eine Gerade und K_6 eine Curve, so dass also die Linie K_1 von der Ebene KP im Punkte K_5 und in noch einem Punkte Q geschnitten wird, so ist F die Kegelfläche, welche die Curve K_1 aus dem Schnittpunkte der Geraden K, PQ projecirt. Die übrigen Fälle sind in den vorigen Nummern betrachtet worden.

453. Durch eine Linie K II. Ordnung, welche in der Ebene U liegt, und vier ausserhalb dieser Ebene liegende Punkte A, B, C, D , welche die Eckpunkte eines Tetraeders sind, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K gemein hat und durch die vier gegebenen Punkte geht.

Liegt die Gerade ζ , in welcher die Ebene U von der Ebene ABC geschnitten wird, in der Linie K , so besteht die Fläche F aus der Ebene ABC und einer durch den Punkt D gehenden Ebene. Wenn aber die Gerade ζ mit der Linie K höchstens zwei Punkte gemein hat, so gibt es in der Ebene ABC eine durch die drei Punkte A, B, C gehende Linie K_1 II. Ordnung, so dass sK_1 mit sK zusammenfällt, und alsdann ist F diejenige durch den Punkt D gehende Fläche II. Ordnung, welche mit der Ebene U die Linie K und mit der Ebene ABC die Linie K_1 gemein hat.

454. Wenn eine Kegelfläche II. Ordnung und eine Regelfläche in zwei Geraden a, p sich schneiden, so schneiden sie sich auch noch in einer Curve II. Ordnung.

Legt man durch irgend drei ausserhalb der Ebene ap liegende Punkte, welche die Kegelfläche mit der Regelfläche gemein hat, eine Ebene U , so schneidet diese beide Flächen in einer und derselben Curve, nämlich in der Curve II. Ordnung, welche durch jene drei Punkte und durch die Punkte Ua, Up geht. — Wenn also eine Kegelfläche und eine Regelschaar, welche zu einem und demselben Ebenenbüschel p I. Ordnung perspectivisch sind, eine Gerade a mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve II. Ordnung perspectivisch.

455. Wenn eine Kegelfläche und eine Regelfläche in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, so schneiden sie sich entweder auch in zwei Geraden oder in noch einer Curve II. Ordnung, je nach-

dem nämlich der Mittelpunkt S der Kegelfläche in der Regelfläche oder ausserhalb derselben liegt.

Es sei dem Punkte S in Hinsicht auf die Regelfläche die Ebene U zugeordnet, so schneidet diese im erstern der erwähnten Fälle die Regelfläche in zwei Geraden, welche, da jede derselben mit der Curve K einen Punkt gemein hat, auch in der Kegelfläche liegen. Wenn aber die Ebene U nicht durch den Punkt S geht, so schneidet auch die Ebene V , welche von der Ebene K durch den Punkt S und die Ebene U harmonisch getrennt ist, beide Flächen in einer und derselben Curve.

456. Zwei Regelflächen, welche in zwei in einerlei Ebene liegenden Geraden a , p sich schneiden, schneiden sich entweder auch in einer Curve II. Ordnung oder in noch zwei Geraden.

Es seien A , B , C irgend drei ausserhalb der Ebene ap liegende Punkte, welche die beiden Regelflächen mit einander gemein haben. Liegen nun diese drei Punkte in einer und derselben Geradeu so haben die Regelflächen nach 254 noch eine vierte Gerade mit einander gemein. Ist aber durch die drei Punkte A , B , C eine Ebene U bestimmt, so schneidet diese die beiden Regelflächen in einer und derselben nämlich derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die drei Punkte A , B , C geht und mit der Ebene ap die Punkte Ua , Up oder, wenn diese in einander fallen, nur den Punkt ap gemein hat. — Wenn also zwei Regelschaaren, welche zu einem und demselben Ebenenbüschel p I. Ordnung perspektivisch sind, eine Gerade a mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einem und demselben Punktgebilde I. oder II. Ordnung perspektivisch.

457. Zwei Regelflächen, welche in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, schneiden sich entweder auch in zwei Geraden oder in noch einer Curve II. Ordnung.

Jede Ebene, welche der einen Regelfläche in einem Punkte der Curve K sich anschmiegt, die andere aber in einer Curve schneidet, enthält zwei gemeinschaftliche Punkte der Flächen, welche ausserhalb der Ebene K und mit keinem Punkte der Curve K in einer und derselben Geraden liegen. Es seien nun A , B , C drei ausserhalb der Ebene K liegende gemeinschaftliche Punkte der beiden Regelflächen, so dass die Gerade AB durch keinen Punkt der Curve K und also auch nicht durch den Punkt C geht, so schneidet die Ebene ABC ,

sie mag nun mit der Curve K zwei Punkte D, E oder nur einen Punkt D gemein haben, beide Regelflächen in einer und derselben nämlich derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die drei Punkte A, B, C geht und mit der Ebene K im erstern der erwähnten Fälle die Punkte D, E , im letztern aber nur den Punkt D gemein hat.

458. Den bisherigen Sätzen stehen nach dem Gesetze der Reciprocität eben so viele andere gegenüber, von welchen aber nur folgende ausgesprochen werden sollen:

I. Durch eine Kegelfläche II. Ordnung, dann zwei Gerade, welche die Kegelfläche in einem und demselben Punkte berühren, und eine Ebene, welche weder durch den Mittelpunkt der Kegelfläche noch durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, ist (446) eine Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene Kegelfläche in einer Curve II. Ordnung berührt, durch die beiden gegebenen Geraden geht und die gegebene Ebene in zwei Geraden schneidet.

II. Durch zwei Kegelflächen, welche (253) in zwei Curven K, K_1 II. Ordnung sich schneiden, und eine Ebene, welche beide Curven schneidet, aber von keiner der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält, ist eine Regelfläche bestimmt, welche nämlich jede von den beiden Kegelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt und die gegebene Ebene in zwei Geraden schneidet. — Die beiden Kegelflächen bestimmen (451) mit jeder Ebene U , welche keiner derselben sich anschmiegt, einen Ebenenbündel E II. Ordnung, in welchem die den Kegelflächen sich anschmiegenden Ebenenbündel und die Ebene U enthalten sind. Wenn nun diese Ebene von keiner der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält und die beiden Curven K, K_1 schneidet, so schmiegt der Ebenenbündel E einer Regelfläche sich an. Wenn aber die Ebene U die eine Curve berührt, so ist E der durch diese Curve (36) bestimmte Ebenenbündel. Wenn endlich die Ebene U von irgend einer der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält, so ist E der Inbegriff von zwei Ebenenbündeln I. Ordnung.

459. Zwei Regelflächen F, F_1 , welche eine Ebene in denselben zwei Geraden a, p schneiden, können als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären räumlichen Systemen betrachtet werden, welche alle Punkte jener Ebene entsprechend gemein haben.

Es seien abc, pqr die in F enthaltenen Regelschaaren und b_1, c_1, q_1, r_1 diejenigen in F_1 liegenden Geraden, welche die Ebene

ap in den Punkten pb , pc , aq , ar schneiden. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass den Geraden a, b, c , p, q, r des einen Systems die Geraden a, b_1, c_1, p, q_1, r_1 des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme alle Elemente der Ebene ap und daher auch (G. 134) alle Elemente eines Strahlenbündels S entsprechend gemein, während der Fläche F des erstern Systems die Fläche F_1 des letztern entspricht. Jede Ebene, welche sowohl der Fläche F als auch der Fläche F_1 sich anschmiegt, ohne durch den Punkt ap zu gehen, geht durch zwei ausserhalb der Ebene ap liegende Gerade der Fläche F und die ihnen entsprechenden Geraden der Fläche F_1 , mithin durch den Punkt S . Und wenn eine durch diesen Punkt gehende Ebene der einen von den beiden Regelflächen sich anschmiegt, so schmiegt sie auch der andern sich an. Berühren sich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p , so fällt der Punkt S mit dem Punkte ap zusammen. Berühren sich die Flächen F, F_1 in der einen a von den beiden Geraden a, p , während sie in der andern p und also in noch einer Geraden q sich schneiden, so fällt der Punkt S mit dem Punkte aq zusammen. Schneiden sich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p und in noch zwei Geraden b, q , so fällt der Punkt S mit dem Punkte bq zusammen. Wenn endlich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p und in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, so ist S der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche in einer Curve L II. Ordnung die Fläche F , mithin in der der Curve L entsprechenden Curve L_1 die Fläche F_1 berührt. — Wenn also zwei Regelschaaren, welche eine Gerade a mit einander gemein haben, zu einem und demselben geraden Gebilde p perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung perspektivisch.

Die Fläche F_1 wird von den Ebenen pb, pc in der Geraden p und in noch zwei Geraden b_2, c_2 und eben so von den Ebenen aq, ar in der Geraden a und in noch zwei Geraden q_2, r_2 geschnitten. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, r des einen Systems die Geraden a, b_2, c_2, p, q_2, r_2 des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme alle Elemente des Strahlenbündels, dessen Mittelpunkt der Punkt ap ist, und daher auch alle Elemente einer Ebene U entsprechend gemein, während der Fläche F des erstern Systems die Fläche F_1 des letztern entspricht. Die Ebene U fällt im ersten der oben

betrachteten Fälle mit der Ebene ap , im zweiten mit der Ebene aq , im dritten mit der Ebene bq und im vierten mit der Ebene K zusammen.

460. Durch zwei Regelflächen F, F_1 , welche in zwei Geraden a, p und in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, ist (459) eine Kegelfläche bestimmt, welche nämlich jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt. Der Mittelpunkt dieser Kegelfläche ist vom Punkte ap durch die beiden Punkte M, M_1 harmonisch getrennt, von welchen der eine M in Hinsicht auf die Fläche F , der andere M_1 aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Ebene K zugeordnet ist.

Nach dem Vorigen kann man die Flächen F, F_1 als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen betrachten, welche jedes durch den Punkt ap gehende und jedes in der Ebene K liegende Element entsprechend gemein haben, daher die beiden Punkte M, M_1 mit dem Punkte ap in einer und derselben Geraden liegen. Ist ferner H ein ausserhalb der Curve K und der Geraden MM_1 liegender Punkt der Ebene K , so wird die Fläche F von der Geraden MH in zwei Punkten A, B und die Fläche F_1 von der Geraden M_1H in zwei Punkten A_1, B_1 geschnitten, so dass auch die Geraden AA_1, BB_1 durch den Punkt ap gehen, während die Geraden AB_1, A_1B , da $HAMB, HA_1M_1B_1$ harmonische Würfe sind, in dem Punkte S sich schneiden, welcher vom Punkte ap durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt ist und ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegt, weil in Hinsicht auf keine derselben die Punkte M, M_1 einander conjugirt sind. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass sie alle Elemente des Strahlenbündels S und alle Elemente der Ebene K entsprechend gemein haben und dass dem Punkte A des einen Systems der Punkt B_1 des andern entspricht, so entspricht wieder dem Punkte M des erstern Systems der Punkt M_1 des letztern und der Regelfläche F , welche in der Curve K die Kegelfläche MK berührt und durch den Punkt A geht, die Regelfläche F_1 , welche in der Curve K die Kegelfläche M_1K berührt und durch den Punkt B_1 geht, daher der der Regelfläche F sich anschmiegende Ebenenbüschel, welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat, auch der Regelfläche F_1 sich anschmiegt und der Punkt S mit dem in der vorigen Nummer durch S bezeichneten Punkte identisch ist.

Gleichwie die Punkte a, p, S durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt sind, so sind auch die Ebenen a, p, K durch die Ebenen L, L_1 harmonisch getrennt, von welchen die eine in Hinsicht auf die Fläche F , die andere aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 dem Punkte S zugeordnet ist. Der Schnittlinie dieser vier Ebenen ist in Hinsicht auf beide Flächen die Gerade MM_1 zugeordnet, welche in der Ebene a, p oder ausserhalb der Ebene a, p liegt, je nachdem der Punkt a, p der Curve K angehört oder nicht angehört.

461. Durch zwei Regelflächen F, F_1 , welche in zwei Curven K, K_1 II. Ordnung sich schneiden, sind zwei Kegelflächen bestimmt, deren jede jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt.

Es sei der Ebene K in Hinsicht auf die Fläche F der Punkt M , in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Punkt M_1 zugeordnet und H irgend ein ausserhalb der Curve K und auch ausserhalb der Geraden MM_1 liegender Punkt der Ebene K . Es werde ferner die Fläche F von der Geraden MH in den Punkten A, B und die Fläche F_1 von der Geraden M_1H in den Punkten A_1, B_1 geschnitten, so sind $HAMB, HA_1M_1B_1$ harmonische Würfe, daher die Gerade MM_1 von den Geraden AA_1, BB_1 in einem und demselben Punkte S und von den Geraden AB_1, A_1B in dem Punkte S_1 geschnitten wird, welcher vom erstern durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt ist. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass sie alle Elemente der Ebene K und alle Elemente des Strahlenbündels S entsprechend gemein haben und dass dem Punkte M des einen Systems der Punkt M_1 des andern, folglich dem Punkte A des erstern der Punkt A_1 des letztern entspricht, so entspricht der Regelfläche F , welche in der Curve K die Kegelfläche MK berührt und durch den Punkt A geht, die Regelfläche F_1 , welche in der Curve K die Kegelfläche M_1K berührt und durch den Punkt A_1 geht. Es ist hiernach und weil die Flächen F, F_1 keine Gerade mit einander gemein haben, der Punkt S der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche in einer Curve L II. Ordnung die Fläche F und in der der erstern entsprechenden Curve L_1 die Fläche F_1 berührt. Werden je zwei mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegende Punkte der Fläche F mit einander vertauscht, so sind F, F_1 homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen, welche alle Elemente des Strahlen-

liegt und dass auf jeden andern Punkt N der Curve der durch ihn bündels S und alle Elemente der Ebene K_1 entsprechend gemein haben. Eben so können F, F_1 als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen betrachtet werden, welche alle Elemente des Strahlenbündels S_1 und alle Elemente der Ebene K oder der Ebene K_1 entsprechend gemein haben, daher auch der Punkt S_1 der Mittelpunkt einer Kegelfläche ist, welche in der einen L_2 von zwei Curven II. Ordnung die Regelfläche F und in der andern L_3 die Regelfläche F_1 berührt. Die Ebenen K, K_1 sind sowohl durch die Ebenen L, L_1 als auch durch die Ebenen L_2, L_3 harmonisch getrennt, gleichwie die Punkte S, S_1 auch durch die beiden Punkte M_2, M_3 harmonisch getrennt sind, von welchen der eine in Hinsicht auf die Fläche F und der andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Ebene K_1 zugeordnet ist.

Die im Satze erwähnten Kegelflächen berühren sich entweder in der Geraden SS_1 , oder es haben die ihnen sich anschmiegenden Ebenenbüschel zwei Ebenen S_1SP, SS_1Q mit einander gemein, je nachdem nämlich die Schnittlinie der Ebenen K, K_1 , welche in Hinsicht auf jede der Flächen F, F_1 der Geraden SS_1 zugeordnet ist, die Curven K, K_1 in einem und demselben Punkte berührt oder in denselben zwei Punkten P, Q schneidet. Im letztern Falle schneidet die Gerade SS_1 die Fläche F in zwei Punkten C, D , die Fläche F_1 in zwei Punkten C_1, D_1 und die Ebenen K, K_1 in zwei Punkten N, N_1 , so dass (85) $CD_1.C_1D.NS.N_1S_1, CC_1.DD_1.NS_1.N_1S, CD.C_1D_1.NN_1.SS_1$ Involutionen sind. Die Punkte S, S_1 liegen also entweder beide ausserhalb der Ebenen K, K_1 oder es fällt der eine mit dem Punkte N und der andere mit dem Punkte N_1 zusammen. — Haben zwei Regelflächen keine Curve II. Ordnung mit einander gemein, so gibt es auch, wie leicht indirekt folgt, keine Kegelfläche, welche jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt.

§. 33.

Uebene Linien III. Ordnung.

462. Zwei Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, aber in einer Geraden SS_1 sich schneiden,

pfundeln sich auf in einer Kurve K, welche die in Mlt =

obwohl sie aus P. 300!

telpunkte S, S_1 der Kegelflächen geht und aus jedem in ihr liegenden Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird.

Es sei S_2 irgend ein ausserhalb der Geraden SS_1 liegender gemeinschaftlicher Punkt der Flächen F, F_1 . Bezieht man nun die drei Ebenenbüschel, deren Axen die Geraden SS_1, SS_2, S_1S_2 sind, projektivisch so auf einander, dass der erste und zweite die Kegelfläche F , der erste und dritte aber die Kegelfläche F_1 erzeugen, so erzeugen der zweite und dritte die Kegelfläche F_2 , welche die Curve K aus dem Punkte S_2 projicirt. In jedem Punkte dieser Curve schneiden sich drei homologe Ebenen der zu einander projektivischen Ebenenbüschel und daher auch drei homologe Strahlen der zu einander projektivischen Kegelflächen, von welchen je zwei zu einem der drei Ebenenbüschel perspektivisch sind. Der Ebene SS_1T des ersten Büschels, welche nämlich die Kegelfläche F_1 in der Geraden SS_1 berührt und also die Kegelfläche F in dieser Geraden und in noch einer Geraden ST schneidet, entspricht die Ebene SS_2T des zweiten und die Ebene SS_1S_2 des dritten, daher die Ebene SS_2T in der Geraden SS_2 die Kegelfläche F_2 berührt.

Jeder von ST verschiedene Strahl der Kegelfläche F projicirt aus dem Punkte S einen andern Punkt der Curve K . Der Strahl ST , welcher im Punkte S jede Kegelfläche berührt, die die Curve K aus einem andern in ihr liegenden Punkte projicirt, und daher mit der Curve K nur den Punkt S gemein hat, ist die derselben in diesem Punkte sich anschmiegende Gerade. Die Ebene, welche die Kegelfläche F in der Geraden SS_1 berührt, schneidet die Kegelfläche F_1 in dieser Geraden und in der Geraden S_1T_1 , welche der Curve K im Punkte S_1 sich anschmiegt.

463. Eine Curve, welche aus jedem in ihr liegenden Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird, folglich mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte und mit keiner Ebene mehr als drei Punkte gemein hat, soll eine unebene Curve III. Ordnung heissen.. Je zwei Kegelflächen, welche eine solche Curve aus zwei in ihr liegenden Punkten projiciren, schneiden sich auch noch (252) in der Geraden, welche sie mit einander gemein haben.

Ist von einer unebenen Curve K III. Ordnung und einer zu derselben perspektivischen Kegelfläche MK die Rede, so versteht es sich von selbst, dass der Mittelpunkt M der Kegelfläche in der Curve K

3-7.298 schneiden sich auch noch in einer Curve K , welche durch die Mit-
 gehende Strahl MN der Kegelfläche MK bezogen wird. Dem Punkte
 M der Curve entspricht derjenige Strahl m der Kegelfläche, welcher
 durch keinen andern Punkt der Curve geht, also im Punkte M der
 Curve K sich anschmiegt und jede andere zu derselben perspectivi-
 sche Kegelfläche berührt, mithin weder mit zwei andern Punkten der
 Curve noch mit einer andern ihr sich anschmiegenden Geraden in
 einerlei Ebene liegt. Jede Ebene, welche nicht durch die Gerade m
 geht aber die Kegelfläche MK in zwei Geraden MN , MP schneidet,
 schneidet die Curve K im Punkte M und in noch zwei Punkten N, P .
 Schneidet eine Ebene die Kegelfläche MK in der Geraden m und in
 noch einer Geraden MN , so berühren sich die Ebene und die Curve K
 im Punkte M , während sie in einem andern Punkte N sich schneiden.
 Berührt eine Ebene die Kegelfläche MK in einer von m verschiede-
 nen Geraden MN , so schneidet sie die Curve K im Punkte M , wäh-
 rend sie dieselbe in einem andern Punkte N berührt. Die Ebene aber
 welche die Kegelfläche MK in der Geraden m berührt, hat mit der
 Curve K nur den Punkt M gemein und ist die in diesem Punkte der
 Curve sich anschmiegende Ebene. Geht eine Ebene U durch keinen
 von den beiden Punkten M, N der Curve K , so schneidet sie die
 Kegelflächen MK, NK in zwei Curven II. Ordnung, welche einen Punkt
 H der Geraden MN mit einander gemein haben aber in ihm nicht eine
 und dieselbe Gerade berühren, folglich entweder in noch drei Punk-
 ten A, B, C sich schneiden, oder in einem Punkte A sich berühren
 und in einem andern von H verschiedenen Punkte B sich schneiden
 oder in einem Punkte A dreipunktig einander sich anschmiegen. Im
 ersten dieser drei Fälle schneiden sich die Ebene U und die Curve
 K in den drei Punkten A, B, C , während sie im zweiten Falle im
 Punkte A sich berühren und im Punkte B sich schneiden, im dritten
 Falle aber im Punkte A einander sich anschmiegen.

Alle Kegelflächen, welche zu einer und derselben unebenen
 Curve III. Ordnung perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch,
 da je zwei derselben auch zu einem und demselben Ebenenbüschel
 perspektivisch sind. Und wenn zwei Kegelflächen II. Ordnung zu ei-
 nem und demselben Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch sind,
 aber weder einerlei Mittelpunkt noch die Axe des Büschels entspre-

chend gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve III. Ordnung perspektivisch.

464. Durch sechs Punkte M, N, A, B, C, D , von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, ist eine unebene Curve K III. Ordnung bestimmt welche nämlich durch die sechs gegebenen Punkte geht. — Jede von den beiden Kegelflächen MK, NK , welche in der Geraden MN und in der Curve K sich schneiden, ist durch die fünf Strahlen bestimmt, welche aus ihrem Mittelpunkte die fünf übrigen der gegebenen Punkte projectiren. — Soll eine Curve K III. Ordnung durch die fünf Punkte M, N, A, B, C gehen und im Punkte M der Geraden MD sich anschmiegen, so ist die Kegelfläche MK , wie vorhin, durch die fünf Strahlen MN, MA, MB, MC, MD , die Kegelfläche NK aber durch die vier Strahlen NM, NA, NB, NC und die ihr in der Geraden NM sich anschmiegende Ebene NMD bestimmt. — Soll eine Curve K III. Ordnung durch die vier Punkte M, N, A, B gehen und in den erstern den Geraden MD, NC sich anschmiegen, so ist die Kegelfläche MK durch die vier Geraden MN, MA, MB, MD und die ihr in der Geraden MN sich anschmiegende Ebene MNC , die Kegelfläche NK aber, wie vorhin, durch die Geraden NM, NA, NB, NC und die ihr in der Geraden NM sich anschmiegende Ebene NMD bestimmt. — Soll eine Curve K III. Ordnung in den Punkten M, N, A den Geraden MD, NC, AB sich anschmiegen, so muss die Kegelfläche MK in den Geraden MN, MA die Ebenen MNC, MAB die Kegelfläche NK aber in den Geraden NM, NA die Ebenen NMD, NAB berühren und überdiess die erstere durch die Gerade MD , die letztere aber durch die Gerade NC gehen. — Soll eine Curve K III. Ordnung im Punkte M der Geraden MD und der Ebene MDB , im Punkte N der Geraden NC und der Ebene NCB sich anschmiegen und überdies durch den Punkt A gehen, so muss die Kegelfläche MK in den Geraden MN, MD die Ebenen MNC, MDB , die Kegelfläche NK aber in den Geraden NM, NC die Ebenen NMD, NCB berühren und überdiess die erstere durch die Gerade MA , die letztere aber durch die Gerade NA gehen.

465. Eine unebene Linie III. Ordnung, welche aus andern Linien zusammengesetzt ist, besteht entweder aus den drei Kanten eines Dreikants oder aus drei Geraden, von welchen zwei nicht in einerlei Ebene liegen, während jedoch beide von der dritten geschnitten werden, oder aus einer Curve II. Ordnung und einer Geraden,

welche mit der Curve einen Punkt gemein hat aber mit ihr nicht in einerlei Ebene liegt. — Durch sechs Punkte M, N, A, B, C, D , von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, ist eine Linie K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die sechs gegebenen Punkte geht.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einerlei Ebene, so besteht die Linie K aus der Geraden MN und derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, C, D und den Punkt geht, den die Ebene ABC mit der Geraden MN gemein hat. Liegen aber keine vier von den sechs gegebenen Punkten in einerlei Ebene, so ist K eine Curve III. Ordnung.

466. Ist von einer unebenen Curve K III. Ordnung und einem zu ihr perspektivischen Ebenenbüschel u I. Ordnung die Rede, so versteht es sich von selbst, dass die Axe u des Ebenenbüschels entweder mit der Curve K zwei Punkte A, B gemein hat oder derselben in einem Punkte A sich anschmiegt und dass auf jeden ausserhalb der Geraden u liegenden Punkt der Curve die durch ihn gehende Ebene des Büschels bezogen wird. Dem Punkte A entspricht im erstern Falle die Ebene, welche die Curve K im Punkte A berührt und im Punkte B schneidet, und eben so dem Punkte B die Ebene, welche die Curve im Punkte B berührt und im Punkte A schneidet. Im letztern Falle aber entspricht dem Punkte A die Ebene, welche durch keinen andern Punkt der Curve geht also derselben im Punkte A sich anschmiegt. Umgekehrt ist durch jede Ebene des Büschels u ein Punkt der Curve K bestimmt, welchem nämlich die gegebene Ebene entspricht.

Alle Ebenenbüschel I. Ordnung, welche zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch. Haben nämlich die Axen u, v von zwei zur Curve K perspektivischen Ebenenbüscheln I. Ordnung einen Punkt S mit einander gemein, so liegt dieser in der Curve K , daher die beiden Büschel zu einer und derselben Kegelfläche SK II. Ordnung perspektivisch sind. Haben aber die Geraden u, v keinen Punkt mit einander gemein, so darf man nur, um diesen Fall auf den so eben betrachteten zurückzuführen, einen dritten zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschel I. Ordnung annehmen, dessen Axe die beiden Geraden u, v schneidet.

467. Wenn ein Strahlenbüschel S I. Ordnung und eine Curve K II. Ordnung zu einander projektivisch sind und überdiess in einerlei

Ebene liegen, so geht wenigstens ein Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Curve. Wenn nämlich weder der Punkt P der Curve K in dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels S liegt, noch der Strahl SP dieses Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Curve geht, so erzeugt der Strahlenbüschel P , welcher zur Curve K perspektivisch und in Folge dessen auch zu dem Büschel S projektivisch ist, mit diesem eine Curve K_1 II. Ordnung, welche die erstere im Punkte P schneidet und daher mit derselben wenigstens noch einen Punkt gemein hat. Bemerkt man nun, dass jeder von P verschiedene gemeinschaftliche Punkt der Curven K, K_1 in dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels S liegt, so folgt der Satz.

Geht die Axe eines Ebenenbüschels I. Ordnung, welcher zu einer Kegelfläche II. Ordnung projektivisch ist, durch den Mittelpunkt derselben, so geht wenigstens eine Ebene des Büschels durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche.

468. Wenn ein Ebenenbüschel u I. Ordnung und eine Kegelfläche F II. Ordnung zu einander projektivisch sind, aber keine Ebene des Büschels durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche geht, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung, welche mit der Axe u des Ebenenbüschels zwei Punkte A, B gemein hat oder denselben in einem Punkte A sich anschmiegt, je nachdem diese Gerade die Kegelfläche F in zwei Punkten A, B schneidet oder in einem Punkte A berührt.

Es sei v der durch den Punkt A gehende Strahl der Kegelfläche F . Bezieht man nun den Ebenenbüschel v auf die Kegelfläche F perspektivisch, so ist derselbe dadurch auch auf den Ebenenbüschel u projektivisch bezogen und erzeugt mit diesem eine Kegelfläche F_1 welche die erstere in der Geraden v und in der im Satze erwähnten Curve K schneidet. Der Ebene uv des Büschels u entspricht diejenige Ebene des Büschels v , welche die Kegelfläche F in dem Strahle v und in dem der Ebene uv des erstern Büschels entsprechenden Strahle schneidet. Die der Kegelfläche F in dem Strahl v sich anschmiegende Ebene V des Büschels v entspricht derjenigen Ebene U des Büschels u , welcher der Strahl v der Kegelfläche F entspricht, daher die Ebene V die Kegelfläche F_1 in der Geraden v und in noch einer Geraden UV schneidet.

469. Eine Regelschaar soll zu einer in der Regeffläche liegenden Curve III. Ordnung perspektivisch heissen, wenn jede Gerade der Regelschaar durch einen ihr entsprechenden Punkt der Curve geht, aber weder der Curve in diesem Punkte sich anschmiegt noch mit derselben einen zweiten Punkt gemein hat. Ist eine Regelschaar R zu einem Ebenenbüschel u I. Ordnung projektivisch, ohne dass eine Gerade der Regelschaar in der ihr entsprechenden Ebene des Büschels liegt, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung, welche mit der Axe u des Ebenenbüschels zwei Punkte A, B gemein hat oder derselben in einem Punkte A sich anschmiegt, je nachdem diese Gerade die Regeffläche in zwei Punkten A, B schneidet oder in einem Punkte A berührt.

Es sei v der durch den Punkt A gehende, w aber irgend ein anderer Leitstrahl der Regelschaar R . Wenn man nun die Ebenenbüschel v, w auf die Regelschaar R perspektivisch bezieht, so hat man drei zu einander projektivische Ebenenbüschel u, v, w , von welchen keine zwei eine Ebene entsprechend gemein haben und keine drei homologe Ebenen in einer und derselben Geraden sich schneiden. Die Kegelfläche, welche die beiden erstern Büschel erzeugen, erzeugt (468) mit dem dritten eine zu jedem der drei Büschel perspektivische Curve K III. Ordnung, welche auch die Regelschaar R mit dem Büschel u erzeugt. Es folgt aber hieraus zugleich, dass jeder Leitstrahl der Regelschaar R und daher keine Gerade dieser Schaar die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist.

470. Je drei zu einander projektivische Ebenenbüschel I. Ordnung, von welchen keine zwei eine Ebene entsprechend gemein haben und keine drei homologe Ebenen in einer und derselben Geraden sich schneiden, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung. Je zwei der drei Büschel erzeugen nämlich ein zu ihnen perspektivisches Gebilde G II. Ordnung, welches mit dem dritten die Curve K erzeugt. Ist G eine Regelschaar, so entspricht jeder Geraden derselben ein Punkt der Curve, während jeder Leitstrahl der Regelschaar die Axe eines zur Curve perspektivischen Ebenenbüschels ist. Ist aber G eine Kegelfläche, so sind in jedem Strahle derselben die beiden erwähnten Eigenschaften vereinigt.

471. Je zwei zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivische Ebenenbüschel u, v I. Ordnung, deren Axen sich nicht scheiden, erzeugen eine zur Curve perspektivische Regelschaar.

Es sei w ein zur Curve K perspektivischer Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe w die beiden Geraden u, v schneidet. Da nun (466) die drei Ebenenbüschel u, v, w zu einander projektivisch sind, so erzeugen die beiden erstern eine Regelschaar, welche mit dem dritten die Curve K erzeugt und zu dieser Curve perspektivisch ist. Jeder Leitstrahl der erwähnten Regelschaar ist (469) die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels. Diejenige Ebene U des Büschels u , welcher die Ebene vw des Büschels v entspricht, schmiegt der Regelfläche im Punkte uw sich an und geht durch die der Curve K in diesem Punkte sich anschmiegende Gerade s . Wenn also die Gerade u mit der Curve K zwei Punkte gemein hat, so berührt die Gerade s die Regelfläche im Punkte uw . Fallen aber die Geraden s, u in einander, so schmiegt die Ebene U im Punkte uw auch der Curve K sich an.

Durch eine unebene Curve III. Ordnung und zwei Gerade, welche die Axen von zwei zur Curve perspektivischen Ebenenbüscheln sind, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Linien geht und eine Kegelfläche oder Regelfläche ist, je nachdem die gegebenen Geraden in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen. Dass es im erstern Falle keine Regelfläche giebt, welche durch die drei gegebenen Linien geht, folgt aus 454.

472. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade a , welche mit der Curve einen Punkt A gemein hat, aber weder ihr in diesem Punkte sich anschmiegt noch durch einen zweiten Punkt derselben geht, ist eine zur Curve perspektivische Regelschaar R bestimmt, der nämlich die gegebene Gerade angehört.

In jeder durch den Punkt A gehenden Ebene U liegt die Axe u eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels, so dass dem Punkte A der Curve die Ebene U des Büschels entspricht. Schneidet die Ebene U die Curve K im Punkte A und in noch zwei Punkten B, C , so geht die Gerade u durch die beiden letztern Punkte. Berühren sich die Ebene U und die Curve K im Punkte A , während sie in einem andern Punkte B sich schneiden, so geht die Gerade

u durch die beiden Punkte A, B . Schneiden sich die Ebene U und die Curve K im Punkte A , während sie in einem andern Punkte B sich berühren, so schmiegt die Gerade u im Punkte B der Curve K sich an. Wenn endlich die Ebene U der Curve K im Punkte A sich anschmiegt, so ist u die in diesem Punkte der Curve K sich anschmiegende Gerade. Die Gerade u hat also mit der Curve K zwei Punkte gemein oder schmiegt derselben in einem Punkte sich an, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche AK schneidet oder berührt. Es seien nun U, U_1, U_2 drei durch die Gerade a gehende Ebenen, so giebt es in der Ebene U eine Gerade u , in der Ebene U_1 eine Gerade u_1 und in der Ebene U_2 eine Gerade u_2 , so dass u, u_1, u_2 die Axen von drei zur Curve K perspektivischen Ebenenbüscheln sind und dem Punkte A der Curve K die Ebenen ua, u_1a, u_2a der Büschel entsprechen, daher je zwei derselben eine zur Curve K perspektivische Regelschaar erzeugen, der die Gerade a angehört. Da es aber nur eine Fläche II. Ordnung giebt, welche durch die Curve K und die Gerade a , mithin auch durch jede Gerade geht, welche zwei Punkte mit der Curve K und einen dritten mit der Geraden a gemein hat, so folgt, dass u, u_1, u_2 drei Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar R sind und dass auch jeder vierte Leitstrahl dieser Regelschaar, der also in einer vierten durch die Gerade a gehenden Ebene liegt, die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist, welcher mit jedem der drei erstern Büschel die Regelschaar erzeugt.

473. Jede Regelfläche F , welche durch eine Curve K III. Ordnung geht, enthält eine zur Curve perspektivische Regelschaar R . Zwei Leitstrahlen g, h dieser Regelschaar schmiegen der Curve K sich an, während jeder dritte Leitstrahl der Regelschaar mit der Curve K zwei Punkte gemein hat und jede dritte dieser Curve sich anschmiegende Gerade die Regelfläche berührt. Schmiegt eine Ebene dieser Fläche in einem Punkte A der Curve K sich an, so schmiegt sie entweder auch der Curve sich an oder sie berührt die Curve im Punkte A , während sie in einem andern Punkte B dieselbe schneidet, je nachdem nämlich der durch den Punkt A gehende Leitstrahl der Regelschaar R mit der Curve K nur den Punkt A oder noch einen Punkt B gemein hat.

In jedem Punkte A der Curve K schneiden sich nämlich zwei

in der Fläche F liegende Gerade a, p , von welchen nach 454 wenigstens die eine a ausserhalb der Kegelfläche AK liegt, also die Schnittlinie von zwei dieser Fläche sich anschmiegenden Ebenen ist. Da es nun (472) nur eine Fläche II. Ordnung giebt, welche durch die Curve K und die Gerade a geht, so ist diejenige zur Curve K perspektivische Regelschaar, welcher die Gerade a angehört, in der Fläche F enthalten, folglich die Gerade p die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels und mithin ein Strahl der Kegelfläche AK . Auch die übrigen Theile des Satzes ergeben sich aus den vorigen Betrachtungen und wenn man bemerkt, dass die Ebene p a des Büschels p dem Punkte A der Curve K entspricht.

Ist die Curve K reell und a eine reelle Gerade, so ist diese entweder von der Kegelfläche AK eingeschlossen oder die Axe eines um die Kegelfläche AK beschriebenen reellen Flächenwinkels. Im erstern Falle hat jeder reelle Leitstrahl der Regelschaar R mit der Curve K zwei reelle Punkte gemein, während im letztern Falle die Geraden g, h reell sind, ein dritter reeller Leitstrahl der Regelschaar R aber mit der Curve K zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte gemein hat, je nachdem er in dem einen oder in dem andern von den beiden Theilen liegt, in welche die Fläche durch die Geraden g, h getheilt wird.

474. Alle Ebenenbüschel I. Ordnung, Kegelflächen und Regelschaaren, welche zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivisch sind, sind (466) zu einander projektivisch, da jeder zu irgend einem der erwähnten Gebilde II. Ordnung perspektivische Ebenenbüschel I. Ordnung auch zur Curve perspektivisch ist. — Durch eine Gerade h und fünf Punkte A, B, C, D, E , von welchen keine zwei mit der gegebenen Geraden und auch keine vier mit einander in einerlei Ebene liegen, ist eine Curve K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die fünf gegebenen Punkte geht und mit der gegebenen Geraden entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

Der Wurf $A(BCDE)$ in der Kegelfläche AK muss zu dem Wurfe $h(BCDE)$ projektivisch sein. Und wenn man durch die vier Geraden AB, AC, AD, AE eine Kegelfläche II. Ordnung legt, so dass der Wurf $A(BCDE)$ in derselben zu dem Wurfe $h(BCDE)$ projektivisch ist, und alsdann die Kegelfläche und den Ebenenbüschel h pro-

jektivisch so auf einander bezieht, dass den Strahlen AB , AC , AD des erstern Gebildes die Ebenen hB , hC , hD des letztern entsprechen, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Curve. Dass nämlich die Ebene hA des Ebenenbüschels nicht durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche geht, folgt, da die vier Punkte B , C , D , E nicht in einerlei Ebene liegen, indirekt aus 18.

475. Wenn ein Regelschaar R und eine Kegelfläche F II. Ordnung oder zwei Regelschaaren R , F zu einem und demselben Ebenenbüschel u I. Ordnung perspektivisch sind, aber keine Gerade mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve K III. Ordnung perspektivisch.

Jeder andere Ebenenbüschel v I. Ordnung, welcher zur Regelschaar R perspektivisch und daher auch zu dem Gebilde F projektivisch ist, erzeugt mit diesem die im Satze erwähnte Curve, da jede Gerade p der Regelschaar R die ihr entsprechende Gerade q des Gebildes F in demselben Punkte schneidet, in welchem diese Gerade von der ihr entsprechenden Ebene vp des Büschels v geschnitten wird.

Haben also eine Kegelfläche und eine Regelfläche oder zwei Regelflächen eine, aber auch nur eine Gerade u mit einander gemein, so schneiden sie sich auch noch in einer Curve III. Ordnung, welche im erstern Falle durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, in jedem Falle aber mit der Geraden u entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

476. Wenn eine unebene Curve K III. Ordnung mit einer Fläche F II. Ordnung mehr als sechs Punkte, nämlich den Punkt A und wenigstens noch sechs Punkte gemein hat, so liegt die Curve K in der Fläche F .

Da eine unebene Curve III. Ordnung mit keiner Ebene und also auch mit keiner Linie II. Ordnung mehr als drei Punkte gemein hat, so folgt, dass die Fläche F , wenn sie mit der Kegelfläche AK mehr als eine Gerade gemein hat, mit dieser Fläche zusammenfällt. Giebt es hingegen in der Fläche F eine durch den Punkt A gehende Gerade a , welche ausserhalb der Kegelfläche AK liegt, so fällt die Fläche F mit der Regelfläche zusammen, welche durch die Curve K und die Gerade a geht, weil, wenn zwei Flächen F , F_1 II. Ordnung eine Gerade a und sechs ausserhalb derselben liegende Punkte, von

welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, mit einander gemein haben, sie in der Geraden a und in der durch jene sechs Punkte bestimmten Curve K III. Ordnung sich schneiden, alsdann aber die Gerade a mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, was gegen die Annahme ist. Findet keiner der bereits betrachteten Fälle statt, so ist F eine Kegelfläche, welche die Kegelfläche AK in einer Geraden u und in einer Curve III. Ordnung schneidet, die durch die Mittelpunkte der beiden Kegelflächen geht und mit der Curve K wenigstens fünf ausserhalb der Geraden u liegende Punkte gemein hat, demnach mit K zusammenfällt. Es ergibt sich hieraus zugleich, dass die Curve K , im Falle die Fläche F eine Kegelfläche ist, durch den Mittelpunkt derselben geht.

477. Wenn eine Kegelfläche F und eine Regelschaar R oder zwei Regelschaaren F, R zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch.

Es sei A irgend ein Punkt der Curve K , a die ihm entsprechende Gerade des Gebildes F und a_1 die ihm entsprechende Gerade der Regelschaar R , so gibt es in der Ebene aa_1 eine Gerade u , welche die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist, so dass dem Punkte P der Curve die Ebene aa_1 des Büschels entspricht. Bemerkt man nun, dass dieser Büschel (472) auch zu jedem der Gebilde F, R perspektivisch ist, so folgt der Satz.

Zwei Flächen II. Ordnung, welche durch eine und dieselbe Curve III. Ordnung gehen, schneiden sich auch noch in einer Geraden, welche mit der Curve entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

478. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist eine Gerade u bestimmt, welche nämlich durch den gegebenen Punkt geht und mit der gegebenen Curve entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

Es sei A ein beliebiger Punkt der Curve K . Wenn nun die Gerade AP in der Kegelfläche AK liegt, so fällt u mit AP zusammen. Wenn aber (472) die Gerade AP einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar angehört, so ist u der durch den Punkt P

gehende Leitstrahl dieser Regelschaar. — Jede Fläche II. Ordnung, welche durch die Curve K und durch den Punkt P geht, geht auch durch die Gerade u . Geht nämlich eine Fläche II. Ordnung durch die Curve K aber nicht durch die Gerade u , so hat sie mit dieser Geraden keinen ausserhalb der Curve K liegenden Punkt gemein.

479. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung, eine Gerade u , welche die Axe eines zur Curve perspektivischen Ebenenbüschels ist, und einen Punkt Q , welcher in keiner der gegebenen Linien liegt, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die beiden gegebenen Linien K , u und durch den gegebenen Punkt Q geht. Diese Fläche ist eine Kegelfläche oder eine Regelfläche, je nachdem diejenige durch den Punkt Q gehende Gerade, welche mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, die Gerade u schneidet oder nicht schneidet.

Durch eine unebene Curve III. Ordnung und zwei ausserhalb derselben liegende Punkte ist entweder eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Punkte geht, oder es ist die Gerade, welche diese Punkte verbindet, die Axe eines zu der gegebenen Curve perspektivischen Ebenenbüschels.

480. Durch eine Regelfläche F und fünf in dieser Fläche aber nicht zugleich in einer und derselben Ebene liegende Punkte A , B , C , D , E , von welchen keine drei einer und derselben Geraden angehören, sind zwei Linien III. Ordnung bestimmt, deren jede in der gegebenen Fläche liegt und durch die fünf gegebenen Punkte geht.

Da von den zehn Geraden, deren jede zwei der fünf gegebenen Punkte mit einander verbindet, höchstens vier in der Fläche F liegen, so kann man annehmen, dass diese von den Geraden AB , AC , AD , AE geschnitten wird. Liegen nun keine vier von den fünf gegebenen Punkten in einerlei Ebene, so schneiden sich in den vier Geraden AB , AC , AD , AE zwei Flächen II. Ordnung, deren jede mit der Fläche F eine durch den Punkt A gehende Gerade und eine durch die fünf gegebenen Punkte gehende Linie III. Ordnung gemein hat. Wenn aber vier von diesen Punkten in einer und derselben Ebene U liegen, so besteht jede der im Satze erwähnten Linien

aus der Linie UF und einer durch den fünften Punkt gehenden Geraden. Aus dem Beweise und aus 475 folgt noch:

Zwei zu einer und derselben Regelschaar perspektivische Curven III. Ordnung haben höchstens vier Punkte mit einander gemein.

§. 34.

Elementargebilde III. und IV. Ordnung.

481. Durch drei Gerade a, b, c , welche einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C sich anschmiegen, ist ein Regelfläche abc bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Geraden geht. Die Ebenen A_1, ap , von welchen die erstere im Punkte A der Curve K , die letztere in demselben Punkte der erwähnten Regelfläche sich anschmiegt, sind durch die Punkte B, C harmonisch getrennt.

Da nämlich die Ebenen A_1, Ab, Ac die Kegelfläche AK in den Geraden a, AB, AC berühren, so sind (G. 250) die Geraden AB, AC durch die Ebene A_1 und die Ebene ap , welche die Gerade a mit der Schnittlinie p der Ebenen Ab, Ac verbindet, harmonisch getrennt, woraus der Satz folgt. — Die Ebenen ap, bp, cp , welche in den Punkten A, bp, cp der Regelfläche abc sich anschmiegen, schmiegen in denselben Punkten auch der Regelfläche sich an, welche durch die Curve K und die beiden Geraden b, c , mithin (473) nicht durch die Gerade a geht, woraus man schliessen kann, dass die beiden Flächen in der Geraden p sich berühren.

482. Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, a_1 , einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P und eine Ebene E , welche durch keine der gegebenen Geraden aber durch die Schnittlinie der Ebenen Pa, Pa_1 geht, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich der Geraden a die Gerade a_1 und dem Punkte P die Ebene E zugeordnet ist.

Es sei b irgend eine durch den Punkt P gehende Gerade, welche keine von den beiden Geraden a, a_1 schneidet, und b_1 die in der Ebene E liegende Gerade der Regelschaar aa_1b , so ist,

wie aus 92 und 94 leicht hervorgeht, $aa_1.bb_1\dots$ das im Satze erwähnte Nullsystem. Liegt die Gerade b in der Ebene E , so fällt b_1 mit b zusammen.

483. Durch ein Dreieck ABC und ein Dreikant, dessen Mittelpunkt S in der Ebene des Dreiecks liegt und dessen Seiten A_1, B_1, C_1 bezüglich durch die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks gehen, ohne dass eine Kante des Dreikants und eine Seite des Dreiecks sich schneiden, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich jedem Eckpunkte des gegebenen Dreiecks die durch ihn gehende Seite des gegebenen Dreikants und also der Ebene ABC der Punkt S zugeordnet ist.

Es ergibt sich dieser Satz aus dem vorigen, wenn man bemerkt, dass der Geraden AB die Gerade A_1B_1 zugeordnet sein muss und dass die Ebene C_1 durch die Gerade CS geht, welche die beiden erstern schneidet.

484. Je drei Ebenen A_1, B_1, C_1 , welche einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung sich anschmiegen, schneiden sich in einem Punkte S , welcher mit den drei Anschmiegungspunkten A, B, C in einer und derselben Ebene liegt.

Die der Curve K in den Punkten A, B, C sich anschmiegenden Geraden a, b, c sind drei Leitstrahlen einer Regelschaar, von welcher drei Gerade p, q, r bezüglich durch die Punkte A, B, C gehen und drei andere Gerade p_1, q_1, r_1 bezüglich in den Ebenen A_1, B_1, C_1 liegen. Da nun (481) die Ebenen ap, ap_1 durch die Punkte B, C und also auch durch die Geraden q, r harmonisch getrennt sind, so ist $rpqp_1$ ein harmonischer Wurf. Da eben so $pqrq_1, qrpr_1$ harmonische Würfe sind, so ist (G. 220) $pp_1.qq_1.rr_1$ eine Involution. Betrachtet man nun das Nullsystem $pp_1.qq_1.rr_1\dots$, in welchem den Punkten ap, bq, cr die Ebenen ap_1, bq_1, cr_1 zugeordnet sind, so folgt, dass der Schnittpunkt S dieser Ebenen in der durch jene drei Punkte gehenden Ebene ABC liegt. Dasselbe ergibt sich auch, wenn man die Curve in Betrachtung zieht, in welcher die Ebene ABC und die Regelfläche abc sich schneiden. Diese Curve berührt in den Punkten A, B, C die Geraden EF, DF, DE , in welchen die Ebene ABC von den Ebenen ap, bq, cr geschnitten wird, daher die Geraden AD, BE, CF , welche (481) be-

zöglich in den Ebenen A_1, B_1, C_1 liegen, in einem und demselben Punkte S sich schneiden.

485. Eine unebene Curve III. Ordnung soll eine Ordnungscurve von einem Nullsysteme heissen, wenn in demselben jede der Curve sich anschmiegende Ebene ihrem Anschmiegungspunkte zugeordnet ist. — Schmiegen einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 sich an, so ist die Curve K eine Ordnungscurve des Nullsystems, in welchem (483) den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind.

Es sei D irgend ein vierter Punkt der Curve K und D_1 die in ihm derselben sich anschmiegende Ebene, so schneiden sich (484) die Ebenen A_1, B_1, D_1 in einem Punkte P der Ebene ABD und die Ebenen A_1, C_1, D_1 in einem Punkte Q der Ebene ACD . Da nun in dem erwähnten Nullsysteme der Geraden AB die Gerade $A_1 B_1$ zugeordnet ist, so ist (92) die Gerade DP , welche die beiden erstern schneidet, sich selbst zugeordnet. Eben so ist die Gerade DQ sich selbst und also die Ebene D_1 , welche durch die beiden Geraden DP, DQ geht, dem Schnittpunkte D derselben zugeordnet.

486. Durch ein Nullsystem N , dann drei nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C , deren Nullebenen A_1, B_1, C_1 in drei ausserhalb der Ebene ABC liegenden Geraden sich schneiden und eine durch den Punkt A gehende Gerade a , welche in der Ebene A_1 aber ausserhalb der Ebene ABC liegt, ist eine Ordnungscurve des Nullsystems bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Punkte geht und der gegebenen Geraden a sich anschmiegt.

Man suche in der Geraden CS , welche den Punkt C mit dem Schnittpunkte S der Ebenen A_1, B_1, C_1 verbindet und also die Gerade AB in einem Punkte H schneidet, die Punkte F, G , so dass $CSHF, FCHG$ harmonische Würfe sind. Man verbinde ferner den Punkt G mit dem Punkte $a C_1$ durch eine Gerade r_1 und den Punkt B mit dem Punkte $r_1 B_1$ durch eine Gerade b . Legt man nun (464) durch die Punkte A, B, C eine Curve K III. Ordnung, welche den Geraden a, b und den Ebenen A_1, B_1 sich anschmiegt, so ist diese die im Satze erwähnte Ordnungscurve des gegebenen Nullsystems. Wenn nämlich c die der Curve K im Punkte C sich anschmiegende Gerade bezeichnet und p, q, r die durch die Punkte A, B, C gehen-

den Leitstrahlen der Regelschaar abc sind, so geht (481) die Ebene ap durch die Gerade AF , welche von der Geraden AS durch die Punkte B, C harmonisch getrennt ist, und eben so die Ebene bq durch die Gerade BF , daher die Curve L , in welcher die Regelfläche abc von der Ebene ABC geschnitten wird, in den Punkten A, B die Geraden AF, BF berührt. Da ferner die Punkte C, G durch den Punkt F und die Gerade AB harmonisch getrennt sind, so folgt, dass auch der Punkt G in der Curve L liegt und die Schnittlinie r_1 der Ebenen Ga, Gb , ein Leitstrahl der Regelschaar abc ist. Da endlich $ACBG$ ein harmonischer Wurf in der Curve L und also $prqr_1$ ein harmonischer Wurf in der Regelschaar pqr ist, so schmiegt die Ebene C_1 , welche aus dem Punkte C die Gerade r_1 projicirt und daher auch durch die Gerade c geht, im Punkte C der Curve K sich an. — Die Geraden r, r_1 sind auch durch die in den Ebenen A_1, B_1 liegenden Leitstrahlen p_1, q_1 der Regelschaar abc , folglich die Ebenen A_1, B_1 durch die Punkte C, cr_1 harmonisch getrennt, in deren letztem die Ebene C_1 der Regelfläche abc sich anschmiegt.

487. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung ist (485) ein Nullsystem bestimmt, von welchem nämlich die gegebene Curve eine Ordnungscurve ist. Der Curve K ist der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel K_1 zugeordnet, während der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel k sich selbst zugeordnet ist.

Jedem zur Curve k perspektivischen Ebenenbüschel u I. Ordnung ist ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisches gerades Gebilde u_1 zugeordnet, dessen Träger entweder mit der Axe u jenes Ebenenbüschels zusammenfällt oder mit ihr nicht in einerlei Ebene liegt, je nachdem nämlich die Gerade u der Curve K in einem Punkte sich anschmiegt oder mit derselben zwei Punkte gemein hat. — Jeder zur Curve K perspektivischen Kegelfläche MK ist ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivischer Strahlenbüschel M_1K_1 II. Ordnung zugeordnet, welcher mit der Kegelfläche MK den der Curve K im Punkte M sich anschmiegenden Strahl m gemein hat. Gleichwie nun jeder von m verschiedene Strahl der Kegelfläche MK aus dem Punkte M einen andern Punkt A der Curve K projicirt, so wird in jedem von m verschiedenen Strahle des Strahlenbüschels M_1K_1 die Ebene M_1 von einer andern Ebene A_1 des Ebenenbüschels K_1 geschnit-

ten. — Dem der Kegelfläche MK sich anschmiegenden und daher zu dem Strahlenbüschel K perspektivischen Ebenenbüschel MK ist die dem Strahlenbüschel M_1K_1 sich anschmiegende und zu dem Strahlenbüschel k perspektivische Curve M_1k zugeordnet, welche den Strahl m im Punkte M berührt, während in jedem andern Punkte derselben die Ebene M_1 von einem Strahle des Büschels k geschnitten wird. — Jeder zur Curve K perspektivischen Regelschaar R ist eine zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivische Regelschaar R_1 zugeordnet, welche mit der erstern zwei Gerade und die der Curve K sich anschmiegenden Leitstrahlen gemein hat. Geht die Gerade α der Regelschaar R durch den Punkt A der Curve K , so liegt die ihr zugeordnete Gerade α_1 der Regelschaar R_1 in der dem Punkte A zugeordneten Ebene A_1 . Gleichwie nun in der Geraden α zwei Ebenen des Büschels Ak sich schneiden, so hat die Gerade α_1 mit der Curve A_1k zwei Punkte gemein. Schmiegt der durch den Punkt A gehende Leitstrahl der Regelschaar R der Curve K sich an, so ist auch die Gerade α , da sie (473) in diesem Falle in der Ebene A_1 liegt, sich selbst zugeordnet, folglich α_1 mit α identisch.

In jedem Punkte P , welcher in keinem Strahle des Büschels K liegt, schneiden sich drei Ebenen des Büschels K_1 . Diese Ebenen schmiegen der Curve K in den Punkten sich an, in welchen dieselbe von der Nullebene des Punktes P geschnitten wird. Jeder Strahl a des Büschels k geht durch einen Punkt A der Curve K und liegt in einer Ebene A_1 des Büschels K_1 . Durch jeden von A verschiedenen Punkt Q der Geraden a geht noch eine Ebene des Büschels K_1 . Diese Ebene schmiegt der Curve K in dem Punkte sich an, in welchem dieselbe von der Nullebene des Punktes Q geschnitten wird.

488. Jeder unebenen Curve III. Ordnung schmiegt (487) ein Ebenenbüschel III. Ordnung sich an. Sind zwei räumliche Systeme reciprok zu einander, so entspricht jeder unebenen Curve K III. Ordnung in dem einen Systeme ein Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung im andern. Die Curve, welcher dieser Büschel sich anschmiegt, entspricht dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel. Jeder Kegelfläche MK , welche die Curve K aus einem in ihr liegenden Punkte M projicirt, entspricht ein Strahlenbüschel M_1K_1

II. Ordnung, in welchem der Ebenenbüschel K_1 von der dem Punkte M entsprechenden Ebene M_1 geschnitten wird.

Jeder Curve K III. Ordnung, welche in der Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems liegt, ist ein dieser Fläche sich anschmiegender Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung zugeordnet. Jede Ebene des Büschels K_1 schmiegt der Fläche F in einem Punkte der Curve K sich an, während nur zwei Ebenen des Büschels K_1 der Curve K sich anschmiegen. Die in der Fläche F enthaltene zur Curve K perspektivische Regelschaar ist auch zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisch.

489. Je zwei zu einem und demselben geraden Gebilde s perspektivische Strahlenbüschel G, G_1 II. Ordnung, welche weder in einerlei Ebene liegen, noch den Strahl S entsprechend gemein haben, erzeugen einen Ebenenbüschel, welcher einer Curve K III. Ordnung sich anschmiegt. Die zu einander projektivischen Curven L, L_1 , welche den Büscheln G, G_1 sich anschmiegen, erzeugen den der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel k .

Dem Punkte P , in welchem die Curve L die Gerade s berührt, entspricht ein ausserhalb dieser Geraden liegender Punkt P_1 der Curve L_1 , welche die Gerade s in einem Punkte Q_1 berührt, der einem ausserhalb derselben liegenden Punkte Q der Curve L entspricht. Die Gerade PP_1 und die Ebene sP_1 schmiegen der Curve K im Punkte P_1 sich an, in welchem die Gerade PP_1 die Curve L_1 berührt. Eben so schmiegen die Gerade QQ_1 und die Ebene sQ der Curve K im Punkte Q sich an, in welchem die Gerade QQ_1 die Curve L berührt. Jede dritte der Curve K sich anschmiegende Ebene M_1 berührt die Curven L, L_1 in homologen Punkten R, R_1 und schneidet die Geraden s, QQ_1, PP_1 in drei Punkten S, T, U . Die Gerade RR_1 und die Ebene M_1 schmiegen der Curve K in dem Punkte M sich an, in welchem die Gerade RR_1 die Curve M_1k berührt. Diese Curve berührt aber die Geraden SR, SR_1 in den Punkten T, U , daher der Punkt M durch die Punkte R, R_1 vom Schnittpunkte der Geraden RR_1, TU harmonisch getrennt ist und mithin in der Geraden liegt, welche den Punkt S mit dem Schnittpunkte der Geraden RU, TR_1 verbindet.

490. Sind ein gerades Gebilde und ein Strahlenbüschel II. Ordnung oder ein gerades Gebilde und eine Regelschaar zu

einander projektivisch, ohne dass ein Punkt des geraden Gebildes in der ihm entsprechenden Geraden des andern liegt, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde einen Ebenenbüschel, welcher einer unebenen Curve III. Ordnung sich anschmiegt. Einen solchen Ebenenbüschel erzeugen auch drei zu einander projektivische gerade Gebilde, von welchen keine zwei einen Punkt entsprechend gemein haben und keine drei homologe Punkte in einer und derselben Geraden liegen. Durch sechs Ebenen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, ist ein Ebenenbüschel III. Ordnung bestimmt, welchem nämlich die sechs gegebenen Ebenen angehören.

Sind ein Strahlenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar, welche mit dem Büschel keine Gerade gemein hat, oder zwei Regelschaaren, welche keine Gerade mit einander gemein haben zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel III. Ordnung perspektivisch. Und wenn zwei Strahlenbüschel II. Ordnung oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar oder zwei Regelschaaren zu einem und demselben Ebenenbüschel III. Ordnung perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch. — Schneiden sich zwei Regelflächen in einer Geraden s und in einer Curve III. Ordnung, so haben die ihnen sich anschmiegenden Ebenenbündel einen Ebenenbüschel I. und einen Ebenenbüschel III. Ordnung mit einander gemein.

491. Je zwei zu einem und demselben Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung, der einer unebenen Curve K sich anschmiegt, perspektivische gerade Gebilde erzeugen ein drittes zu dem Büschel K_1 perspektivisches Gebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel II. Ordnung oder eine Regelschaar ist, je nachdem nämlich die geraden Gebilde in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen. Jede Gerade r , welche in einer Ebene M_1 des Büschels K_1 liegt, aber nicht der Träger eines zu demselben perspektivischen geraden Gebildes ist, gehört einer zu dem Büschel K_1 perspektivischen Regelschaar R an. Zwei Leitstrahlen dieser Regelschaar sind zugleich Strahlen des der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels k ; sie schneiden die Gerade r in den Punkten, in welchen diese die Curve $M_1 k$ schneidet. Jeder dritte Leitstrahl s der Regelschaar R ist die Schnittlinie von zwei Ebenen des Büschels K_1 , welchen die durch den Punkt rs

gehenden Strahlen des Büschels $M_1 K_1$ entsprechen. — Jede der Curve K sich nicht anschmiegende Ebene U enthält nur ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisches gerades Gebilde. Der Träger u dieses Gebildes ist ein Leitstrahl von jeder zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivischen Regelschaar, welche mit der Ebene U eine Gerade gemein hat. Geht die Ebene U durch einen Strahl des Büschels k , so fällt u mit diesem Strahle zusammen. Wenn aber die Ebene U mit der Curve K drei Punkte gemein hat, so schneiden sich in der Geraden u zwei Ebenen des Büschels K_1 .

492. Wenn einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C, D die Geraden a, b, c, d und die Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1 sich anschmiegen, so ist $ABCD$ ein Wurf in der Curve K , $abcd$ ein Wurf in dem der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel k und $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Wurf in dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1 . Ist ferner s die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels, u der Träger eines zu dem Büschel K_1 perspektivischen geraden Gebildes, M ein Punkt der Curve K , U eine Ebene des Büschels K_1 , $\alpha\beta\gamma\delta$ der dem Wurf $ABCD$ entsprechende Wurf einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar R und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ der dem Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ entsprechende Wurf einer zu dem Büschel K_1 perspektivischen Regelschaar R_1 , so sind, wie aus dem Bisherigen leicht hervorgeht, $s(ABCD)$, $u(A_1 B_1 C_1 D_1)$, $M(ABCD)$, $U(A_1 B_1 C_1 D_1)$, $M(abcd)$, $U(abcd)$, $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ homologe Würfe von acht zu einander projektivischen Gebilden $s, u, MK, UK_1, Mk, Uk, R, R_1$. Sind nun die erwähnten acht einander gleichen Würfe neutrale Würfe, was nur von den Wurfen $ABCD, abcd, A_1 B_1 C_1 D_1$ abhängt, so sollen auch diese Würfe neutrale Würfe heissen. Wenn aber die Ebene sD im Sinne $s(ABC)$, folglich der Punkt uD_1 im Sinne $u(A_1 B_1 C_1)$ liegt u. s. w., so soll auch der Punkt D im Sinne ABC , die Ebene D_1 im Sinne $A_1 B_1 C_1$ und die Gerade d im Sinne abc liegend heissen. Es versteht sich hiernach von selbst, dass der Punkt D im Sinne CBA liegend heisst, wenn die Ebene sD im Sinne $s(CBA)$ liegt. Da also homologe Würfe der Gebilde K, k, K_1, s, u, MK u. s. w., was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, so kann man sagen, dass diese Gebilde sämmtlich zu einander projektivisch und daher auch homologe Würfe derselben einander gleich seien.

493. Jede unebene Curve III. Ordnung und jeder Ebenenbüschel, welcher einer solchen Curve sich anschmiegt, soll ein Elementargebilde III. Ordnung, jeder einer unebenen Curve III. Ordnung sich anschmiegende Strahlenbüschel aber ein Elementargebilde IV. Ordnung genannt werden. Diese Erweiterung des Begriffs: Elementargebilde erscheint dadurch als gerechtfertigt, weil Alles, was von Elementargebilden I. wie II. Ordnung gilt, auch für die erwähnten Gebilde III. und IV. Ordnung gültig ist.

Will man zwei unebene Curven K , K_1 III. Ordnung projektivisch so auf einander beziehen, dass den Punkten A , B , C der erstern die Punkte A_1 , B_1 , C_1 der letztern entsprechen, so darf man nur zwei Ebenenbüschel I. Ordnung, von welchen der eine s zur Curve K , der andere u aber zur Curve K_1 perspektivisch ist, projektivisch so auf einander beziehen, dass den Ebenen sA , sB , sC des erstern die Ebenen uA_1 , uB_1 , uC_1 des letztern entsprechen und zwei Punkte D , D_1 , von welchen der eine D in der Curve K , der andere D_1 aber in der Curve K_1 liegt, einander entsprechend nennen, wenn sie homologen Ebenen der Büschel entsprechen. Man hat dann vier Gebilde K , s , u , K_1 , von welchen jedes folgende zum vorhergehenden und daher auch das letzte zum ersten projektivisch ist. Uebrigens lässt sich leicht noch nachweisen, dass die zu einander projektivischen Punktgebilde K , K_1 homologe Gebilde von zwei zu einander collineären räumlichen Systemen sind. Wenn nämlich der Curve K in den Punkten A , B , C die Geraden a , b , c und der Curve K_1 in den Punkten A_1 , B_1 , C_1 die Geraden a_1 , b_1 , c_1 sich anschmiegen, so kann man zwei räumliche Systeme collinear so auf einander beziehen, dass den Elementen A , B , C , a , b , c des einen Systems die Elemente A_1 , B_1 , C_1 , a_1 , b_1 , c_1 des andern entsprechen. Da alsdann der Geraden v , welche den Punkt A mit dem Punkte B verbindet, die Gerade v_1 entspricht, welche durch die beiden Punkte A_1 , B_1 geht, mithin den Ebenen va , vb , vC die Ebenen v_1a_1 , v_1b_1 , v_1C_1 entsprechen, die Würfe v ($abCD$), v_1 ($a_1b_1C_1D_1$) aber den Würfeln s ($ABCD$), u ($A_1B_1C_1D_1$) und also auch einander gleich sind, so entspricht der Ebene vD die Ebene v_1D_1 und eben so der Ebene ACD die Ebene $A_1C_1D_1$ und der Ebene BCD die Ebene $B_1C_1D_1$, mithin auch dem Punkte D der Punkt D_1 .

494. Sind die Punkte einer unebenen Curve K III. Ordnung

involutorisch gepaart, so sind die Geraden, welche der Curve in den Ordnungs-Punkten M, N des involutorischen Gebildes sich anschmiegen, und die Geraden AA_1, BB_1 u. s. w., deren jede zwei einander zugeordnete Punkte verbindet, Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar R . Das involutorische Punktgebilde $MM. NN. AA_1. BB_1. . .$ wird nämlich aus jedem Punkte S der Curve K durch eine involutorische Kegelfläche $S (MM. NN. AA_1. BB_1. . .)$ projicirt, deren Involutionssaxe (472) eine Gerade der Regelschaar R ist. Die den Punkten M, N entsprechenden Geraden der Regelschaar R sind die Ordnungslinien des geschaart-involutorischen Systems, in welchem das involutorische Punktgebilde enthalten ist.

495. Wenn in einer unebenen Curve K III. Ordnung die Punkte A, C durch die Punkte B, D harmonisch getrennt sind und der Curve in den Punkten A, B, C, D die Geraden a, b, c, d sich anschmiegen, so schneiden sich (494) die beiden Regelflächen, von welchen die eine durch die drei Geraden a, c, BD , die andere aber durch die drei Geraden b, d, AC geht, in der Curve K und in einer Geraden. Diese Gerade geht durch die beiden Punkte, welche in der Curve K sowohl durch die Punkte A, C als auch durch die Punkte B, D harmonisch getrennt, mithin in jedem der involutorischen Punktgebilde $AA. CC. BD. . ., BB. DD. AC. . .$ einander zugeordnet sind.

496. Die drei Regelflächen, deren jede durch zwei einander gegenüberliegenden Kanten eines in eine unebene Curve K III. Ordnung beschriebenen Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ und durch die Curve geht, schneiden sich auch noch in einer und derselben Geraden.

Bezieht man nämlich zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander, dass den Punkten A, B, C des einen Gebildes die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so haben dieselben entweder zwei Punkte M, N oder nur einen Punkt M entsprechend gemein. Im letztern Falle kann man sagen, dass der Punkt N mit dem Punkte M zusammenfalle und die Gerade MN der Curve K im Punkte M sich anschmiege. Da nun (85) $MN. AB_1. A_1B$ eine Involution ist, so sind die Geraden MN, AB_1, A_1B drei Leitstrahlen einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar. Dasselbe gilt von den Geraden MN, AC_1, A_1C , sowie auch von den Geraden MN, BC_1, B_1C , woraus der Satz folgt. Bemerkt wird noch, dass je zwei Seiten (Flächen) des Sechsecks, welche weder auf einander

folgen noch einander gegenüberliegen, in einer Geraden sich schneiden, welche einer der drei erwähnten Regelschaaren angehört, daher die Gerade MN durch die beiden Punkte geht, in deren jedem drei Seiten des Sechsecks, unter welchen keine zwei auf einander folgende sind, sich schneiden.

Eben so giebt es drei Regelflächen, deren jede durch zwei einander gegenüberliegende Kanten des Sechsecks und durch die Schnittlinie s der Ebenen ABC , $A_1B_1C_1$ geht. Die diesen Flächen sich anschmiegenden Ebenenbündel haben alle drei den Ebenenbüschel s und noch einen Ebenenbüschel III. Ordnung, welchem die sechs Seiten des Sechsecks angehören, mit einander gemein.

497. Zwei Punkte P , Q sollen in Hinsicht auf eine unebene Curve K III. Ordnung einander conjugirt heissen, wenn die Gerade PQ eniweder der Curve in einem von den beiden Punkten P , Q sich anschmiegt, oder mit der Curve zwei Punkte gemein hat, durch welche die Punkte P , Q harmonisch getrennt sind. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein anderer Punkt Q bestimmt, welcher nämlich dem Punkte P in Hinsicht auf die Curve K conjugirt ist. Eben so giebt es zu jeder Ebene P_1 , welche dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1 nicht angehört, eine andere Ebene Q_1 , welche der erstern in Hinsicht auf den Büschel K_1 conjugirt ist, so dass nämlich entweder die Gerade P_1Q_1 und die Ebene Q_1 der Curve K sich anschmiegen oder in der Geraden P_1Q_1 zwei Ebenen des Büschels K_1 sich schneiden, welche durch die Ebenen P_1 , Q_1 harmonisch getrennt sind.

In dem Nullsysteme, von welchem K eine Ordnungscurve ist, sind je zwei in Hinsicht auf diese Curve einander conjugirten Punkten P , Q zwei in Hinsicht auf den Ebenenbüschel K_1 einander conjugirte Ebenen P_1 , Q_1 zugeordnet.

498. Wenn in einer unebenen Curve K III. Ordnung die Punkte A , C durch die Punkte B , D harmonisch getrennt sind, so sind auch die Ebenen A_1 , C_1 , welche der Curve in den Punkten A , C sich anschmiegen, durch die Punkte B , D harmonisch getrennt, daher die Gerade BD die Ebenen A_1 , C_1 in zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirten Punkten schneidet, die Ebenen aber, welche die Punkte B , D aus der Geraden A_1C_1 projiciren, in Hinsicht auf

den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel einander conjugirt sind.

Denn die Gerade BD und die Geraden a, c , welche der Curve K in den Punkten A, C sich anschmiegen, sind Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ diejenigen Geraden der erwähnten Regelschaar, welche den Punkten A, B, C, D der Curve entsprechen, so ist auch $\alpha\beta\gamma\delta$ ein harmonischer Wurf, daher die Gerade BD von den Geraden α, γ in zwei Punkten P, Q geschnitten wird, welche durch die Punkte B, D harmonisch getrennt sind. In denselben Punkten wird aber die Gerade BD auch von den Ebenen A_1, C_1 geschnitten, da (473) die erstere durch die Gerade α und die letztere durch die Gerade γ geht.

499. Sucht man in einer unebenen Curve K III. Ordnung zu den drei Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1 , so dass $CAB A_1$, $ABCB_1$, $BCA C_1$ harmonische Würfe sind, so sind die Ebenen ABC , $A_1 B_1 C_1$ in Hinsicht auf den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1 einander conjugirt.

Bezieht man nämlich zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander, dass den Punkten A, B, C des einen die Punkte B, C, A des andern und also den Punkten A_1, B_1, C_1 des erstern die Punkte B_1, C_1, A_1 des letztern entsprechen, so haben dieselben die Ordnungspunkte M, N des involutorischen Gebildes $AA_1. BB_1. CC_1 \dots$ entsprechend gemein. Die zu einander collineären räumlichen Systeme, von welchen $MNABC \dots, MNBCA \dots$ homologe Gebilde sind, haben auch die Ebenen $ABC, A_1 B_1 C_1$, mithin auch die Punkte P, Q in welchen diese Ebenen von der Geraden MN geschnitten werden und folglich jeden Punkt dieser Geraden entsprechend gemein. Da hiernach je zwei homologe Ebenen, welche nicht durch die Gerade MN gehen, diese Gerade in einem und demselben Punkte schneiden, so folgt, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A, B, C sich anschmiegen, in der Geraden MN liegt und also der Punkt P ist. Da eben so die Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A_1, B_1, C_1 sich anschmiegen, im Punkte Q sich schneiden, so sind (498) die Punkte P, Q in Hinsicht auf die Curve K und daher die Ebenen $ABC, A_1 B_1 C_1$ in Hinsicht auf den Ebenenbüschel K_1 einander conjugirt. Die Ebenen, welche der Curve K in den Punkten M, N sich anschmiegen, gehen

durch die Schnittlinie der Ebenen ABC , $A_1B_1C_1$ und sind durch diese harmonisch getrennt.

500. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen Punkt P , welcher ausserhalb der Curve liegt, aber in Hinsicht auf dieselbe einem in ihr liegenden Punkte M conjugirt ist, sind zwei in der Curve liegende zu einander projektivische Gebilde $MNA \dots$, $MNA_1 \dots$ bestimmt, so dass jede Ebene, welche die Curve K in einem Punkte A des erstern Gebildes berührt und in dem entsprechenden Punkte A_1 des letztern schneidet, durch den Punkt P geht. Die Ebene, welche in dem durch die Curve K bestimmten Nullsysteme dem Punkte P zugeordnet ist und also durch die Gerade MP geht, schneidet die Curve K in einem Punkte N , in welchem derselben eine durch den Punkt P gehende Ebene sich anschmiegt. Wenn man nun in der Curve zu den Punkten M , N und einem dritten Punkte A die Punkte A_2 , A_1 sucht, so dass MNA_2 , MNA_2A_1 harmonische Würfe sind, und alsdann zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projectivisch so aufeinander bezieht, dass den Punkten M , N , A des einen die Punkte M , N , A_1 des andern entsprechen, so geht jede Ebene, welche die Curve in einem Punkte des erstern Gebildes berührt und in dem entsprechenden Punkte des letztern schneidet, durch den Punkt P . Denn die Gerade MP und die der Curve K in den Punkten N , A sich anschmiegenden Geraden n , a sind drei Leitstrahlen einer Regelschaar, von welcher eine Gerade r durch den Punkt M , eine andere Gerade p durch den Punkt N , eine dritte Gerade q durch den Punkt A und eine vierte Gerade p_1 durch den Punkt P geht, so dass $rpqp_1$ ein harmonischer Wurf ist. Da ferner die der Curve K im Punkte A sich anschmiegende Ebene von der Ebene aA_2 durch die Punkte M , N harmonisch getrennt ist, so geht die Ebene aA_2 durch die Gerade q , mithin die Ebene aA_1 durch die Gerade p_1 und also auch durch den Punkt P . Ist B ein vierter Punkt des Gebildes $MNA \dots$, und B_1 der ihm entsprechende Punkt des Gebildes $MNA_1 \dots$, so ist $MNAB \propto MNA_1B_1$, folglich auch $MNA A_1 \propto MNBB_1$, daher es einen Punkt B_2 giebt, so dass $MNA A_1 A_2 \propto MNBB_1 B_2$ ist und also auch $MBNB_2$, MNB_2B_1 harmonische Würfe sind, woraus man schliessen kann, dass auch die Ebene, welche die Curve K im Punkt B berührt und im Punkte B_1 schneidet, durch den Punkt P geht. Bemerkt wird noch, dass der Wurf $NAM A_1$ das

Doppelte eines harmonischen Wurfes, also $\equiv -2$ ist und dass jede Ebene, welche die Curve K in einem Punkte A des Gebildes $MNA \dots$ schneidet und in dem entsprechenden Punkte A_1 des Gebildes $MNA_1 \dots$ berührt, durch den Punkt geht, in welchem die Gerade n von der der Curve K im Punkte M sich anschmiegenden Ebene geschnitten wird.

501. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein zur Curve perspektivischer Ebenenbüschel M II. Ordnung bestimmt, so dass, was auch A_1 für ein Punkt der Curve sei, die ihm entsprechende Ebene des Büschels M in Hinsicht auf die Kegelfläche $A_1 K$ dem Punkte P zugeordnet ist.

Liegt der Punkt M , welcher dem Punkte P in Hinsicht auf die Curve K conjugirt ist, in der Curve, so werden aus ihm die im vorigen Satze betrachteten zu einander projektivischen Punktgebilde $MNA \dots$, $MNA_1 \dots$ durch zwei zu einander projektivische Kegelflächen projicirt, welche (574) einen zu allen vier Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel M II. Ordnung erzeugen. Dem Punkte A_1 des zweiten Gebildes entspricht die Ebene $A_1 MA$ des Büschels, welche dem Punkte P in Hinsicht auf die Kegelfläche $A_1 K$ zugeordnet ist, da diese in den Strahlen $A_1 M$, $A_1 A$ die Ebenen $A_1 MP$, $A_1 AP$ berührt. Sind aber die Punkte M , P durch zwei Punkte G , H der Curve K harmonisch getrennt, so projicirt der im Satze erwähnte Ebenenbüschel aus dem Punkte M diejenige zur Curve K perspektivische Regelschaar R , von welcher ein Leitstrahl g im Punkte G , ein anderer h im Punkte H der Curve K sich anschmiegt. Ist nämlich A_1 ein Punkt der Curve und a_1 die durch ihn gehende Gerade der Regelschaar R , so ist in Hinsicht auf die Kegelfläche $A_1 K$ jedem Punkte der Geraden GH eine durch die Gerade a_1 gehende Ebene und also dem Punkte P die Ebene Ma_1 zugeordnet.

Wenn also zwei Punkte in Hinsicht auf irgend drei zu einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung perspektivische Kegelflächen einander conjugirt sind, so sind sie in Hinsicht auf die Curve und also auch in Hinsicht auf jede durch dieselbe gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt.

502. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade h , welche mit der Curve keinen Punkt gemein hat, ist eine andere unebene Curve III. Ordnung bestimmt, welche nämlich zu den

gegebenen geraden Gebilden projectivisch ist, so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf die gegebene Curve einander conjugirt sind.

Es seien F, F_1, F_2 irgend drei zur Curve K perspektivische Kegelflächen, so giebt es (501) zu jedem Punkte der Geraden h nur einen Punkt, welcher dem erstern in Hinsicht auf alle drei Flächen conjugirt ist, daher die drei zu einander projectivischen Ebenenbündel, von welchen der eine in Hinsicht auf die Fläche F , der andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 und der dritte in Hinsicht auf die Fläche F_2 dem geraden Gebilde h zugeordnet ist, eine zu diesem Gebilde projectivische unebene Curve III. Ordnung erzeugen, so dass jeder Punkt dieser Curve dem ihm entsprechenden Punkte der Geraden h in Hinsicht auf die Curve K conjugirt ist.

Gehört die Gerade g einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar R an, so giebt es auch ein zu dem geraden Gebilde g projectivisches Punktgebilde g_1 , so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind. Das Gebilde g_1 , ist entweder ebenfalls ein gerades Gebilde, dessen Träger eine Gerade der Regelschaar R ist, oder eine in der Regelfläche R liegende Curve II. Ordnung, je nachdem nämlich die Gerade g zwei oder drei der Curve K sich anschmiegende Gerade schneidet.

503. Durch zwei zu einander collineäre Strahlenbündel S, S_1 , welche keine Ebene entsprechend gemein haben, ist eine unebene Curve K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich von je zwei in einerlei Ebene liegenden homologen Strahlen der Bündel den Schnittpunkt enthält und daher durch die Mittelpunkte S, S_1 der Bündel geht.

Es sei u_1 die durch die beiden Punkte S, S_1 gehende Gerade. Wenn nun dem Ebenenbündel u des Bündels S der Ebenenbündel u_1 des Bündels S_1 und dem Ebenenbündel u_1 des erstern Bündels der Ebenenbündel u_2 des letztern entspricht, so erzeugen die drei zu einander projectivischen Ebenenbündel u, u_1, u_2 die im Satze erwähnte Curve K . In jedem Punkte dieser Curve schneiden sich drei homologe Ebenen U, U_1, U_2 der Bündel u, u_1, u_2 und daher auch zwei homologe Strahlen $U U_1, U_1 U_2$ der Bündel S, S_1 . Und wenn zwei homologe Strahlen dieser Bündel in einerlei Ebene, mithin in einer und derselben Ebene U_1 des Bündels u_1 liegen, so liegt ihr Schnittpunkt in der Curve K . — Je zwei homologe Ebenen der

Bündel S, S_1 schneiden sich in der Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels. Und wenn eine Gerade mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, so ist sie von zwei homologen Ebenen der Bündel S, S_1 die Schnittlinie. — Je zwei homologe Strahlen p, p_1 der Bündel S, S_1 liegen mit der Curve K in einer und derselben Fläche II. Ordnung. Die Geraden p, p_1 sind nämlich die Axen von zwei homologen Ebenenbüscheln und diese Büschel erzeugen, wenn ihre Axen sich schneiden, eine zur Curve K perspektivische Kegelfläche, im entgegengesetzten Falle aber eine Regelschaar, welche von einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Haben zwei zu einander collineäre Strahlenbündel S, S_1 eine Ebene, aber keinen Strahl entsprechend gemein, so giebt es auch eine Linie K III. Ordnung, welche von je zwei in einerlei Ebene liegenden homologen Strahlen der Bündel S, S_1 den Schnittpunkt enthält. Die Linie K besteht aber in diesem Falle, in welchem die zu einander projektivischen Ebenenbüschel u, u_1, u_2 die Ebene uu_1 entsprechend gemein haben und also ein gerades Gebilde erzeugen, aus dieser Geraden und einer in der Ebene uu_1 liegenden Curve II. Ordnung.

Dass die Strahlenbündel S, S_1 nicht einerlei Mittelpunkt haben, liegt in der Annahme. Haben nämlich zwei zu einander collineäre Strahlenbündel einerlei Mittelpunkt, so haben sie (301) entweder unendlich viele Strahlen und Ebenen oder die Kanten und Seiten eines Dreikants oder zwei Strahlen und zwei Ebenen oder einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein.

504. Durch zwei zu einander collineäre ebene Systeme U, U_1 , welche keinen Punkt entsprechend gemein haben, ist ein Ebenenbüschel III. Ordnung bestimmt, so dass nämlich jede Ebene desselben durch zwei homologe Gerade der zu einander collineären Systeme geht und je zwei sich schneidende homologe Gerade der Systeme in einer Ebene des Büschels liegen. Entspricht der Geraden s des einen Systems die Gerade s_1 des andern, in welcher nämlich die Ebenen U, U_1 sich schneiden, und der Geraden s_1 des erstern die Gerade s_2 des letztern, so sind s, s_1, s_2 die Träger von drei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche den erwähnten Ebenenbüschel erzeugen. Dem Strahlenbüschel, welchen die Gebilde

s, s_1 erzeugen, entspricht der Strahlenbüschel, welchen das Gebilde s_1 mit dem Gebilde s_2 erzeugt.

Haben zwei zu einander collineäre ebene Systeme einen Punkt P , aber ausser diesem kein Element entsprechend gemein, so giebt es einen Ebenenbüschel II. Ordnung und einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe in einer Ebene des erstern Büschels liegt, aber nicht durch den Mittelpunkt P desselben geht, so dass jede Ebene, welche irgend einem der beiden Büschel angehört, durch zwei homologe Gerade der zu einander collineären Systeme geht.

505. Wenn zwei zu einander projektivische Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung keinen Strahl entsprechend gemein haben, so giebt es in ihnen wenigstens ein Paar homologe Strahlen, welche sich schneiden.

Haben nämlich die zu einander collineären Strahlenbündel S, S_1 , von welchen F, F_1 homologe Gebilde sind, irgend eine Ebene entsprechend gemein, so liegen in dieser Ebene wenigstens ein Paar homologe Strahlen der zu einander projektivischen Kegelflächen. Liegen aber (503) die Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen der Bündel S, S_1 sich schneiden, in einer Curve K III. Ordnung, so wird jeder Strahl, welchen die Kegelfläche F mit der Kegelfläche SK gemein hat, von dem ihm entsprechenden Strahle der Kegelfläche F_1 geschnitten.

506. Zwei unebene Curven K, K_1 III. Ordnung, welche in einer und derselben Kegelfläche F II. Ordnung liegen, aber im Mittelpunkte S dieser Fläche nicht einer und derselben Geraden sich anschmiegen, haben wenigstens noch einen Punkt mit einander gemein.

Es sei M ein Punkt der Curve K und N_1 ein Punkt der Curve K_1 , so dass jedoch die drei Punkte S, M, N_1 nicht in einer und derselben Geraden liegen. Bezieht man nun die drei Kegelflächen F, MK, N_1K_1 projektivisch so auf einander, dass die erste und zweite die Curve K , die erste und dritte aber die Curve K_1 erzeugen, so liegen keine drei homologe Strahlen der Flächen in einerlei Ebene. Da aber jeder Strahl der Kegelfläche F die ihm entsprechenden Strahlen der Kegelflächen MK, N_1K_1 schneidet und auch (505) wenigstens ein Paar homologe Strahlen p, p_1 dieser Flächen sich schneiden, so haben die Curven K, K_1 wenigstens einen von S verschiedenen Punkt pp_1 mit einander gemein.

507. Durch fünf Punkte A, B, C, D, E , von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen und zwei einander nicht gleiche eigentliche Würfe w, w_1 , ist eine durch die gegebenen Punkte gehende Curve K III. Ordnung bestimmt, so dass die Würfe $ABCD, ABCE$ in derselben den gegebenen Würfeln w, w_1 bezüglich gleich sind.

In der Geraden u , welche durch die beiden Punkte D, E geht, schneiden sich zwei Ebenen uP, uQ , so dass der Wurf $u(ABCP)$ dem Wurf w und der Wurf $u(ABCQ)$ dem Wurf w_1 gleich ist. Die Kegelfläche, welche durch die vier Geraden EA, EB, EC, ED geht und die Ebene uP berührt, schneidet die Kegelfläche, welche durch die vier Geraden DA, DB, DC, DE geht und die Ebene uQ berührt, in der Geraden u und in der im Satze erwähnten Curve K . — Zwei zu einander projektivische unebene Curven III. Ordnung haben also höchstens vier Punkte entsprechend gemein. Und wenn sie vier Punkte entsprechend und noch einen fünften Punkt mit einander gemein haben, so werden sie aus diesem Punkte durch eine und dieselbe Kegelfläche projecirt.

§. 35.

Räumliche Systeme, welche collinear zu einander sind.

508. Zwei zu einander collineäre räumliche Systeme haben wenigstens einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene entsprechend gemein.

Es entspreche dem Punkte S des einen Systems der Punkt S_1 des andern und dem Punkte S_1 des erstern der Punkt S_2 des letztern. Haben nun die Systeme die Gerade SS_1 entsprechend gemein, so haben sie auch wenigstens einen in ihr liegenden Punkt und eine durch sie gehende Ebene entsprechend gemein. Haben die Systeme zwar nicht die Gerade SS_1 aber die Ebene SS_1S_2 entsprechend gemein, so haben sie nach 301 wenigstens einen Punkt und eine Gerade, welche in der Ebene SS_1S_2 liegen, entsprechend gemein. Wenn aber keiner der erwähnten Fälle statt findet, so giebt es (503) eine durch die beiden Punkte S, S_1 gehende unebene Curve K III. Ord-

nung, so dass, was auch P für ein Punkt derselben sein mag, der Geraden SP des einen Systems die Gerade S_1P des andern entspricht, daher der dem Punkte P entsprechende Punkt P_1 in der Geraden S_1P liegt, der die Gerade S_2P_1 entspricht. Da hiernach die Curve K und die ihr entsprechende Curve K_1 , welche durch die beiden Punkte S_1, S_2 geht, während die erstere der Geraden S_1S_2 im Punkte S_1 sich anschmiegt, aus diesem Punkte durch eine und dieselbe Kegel-
fläche projecirt werden, so haben sie (506) wenigstens einen von S verschiedenen Punkt A mit einander gemein und also die zu einander collineären Systeme wenigstens einen Punkt A entsprechend gemein. Bemerkt man noch, dass zwei zu einander collineäre Strahlenbündel, welche einerlei Mittelpunkt A haben, wenigstens einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein haben, so folgt der Satz

509. Wenn keiner von den beiden Punkten, P, P_1 in einer Seite des Tetraeders $ABCD$ liegt und man zwei räumliche Systeme collinear so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen die Punkte A, B, C, D, P_1 des andern entsprechen, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Geht die Gerade PP_1 durch einen Eckpunkt A des Tetraeders $ABCD$, so haben die Systeme nicht nur den Punkt A sondern auch jedes durch ihn gehende Element und eben so die Ebene BCD und jedes in ihr liegendes Element entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 zwei einander gegenüberliegende Kanten AB, CD des Tetraeders, so haben die Systeme jede Ebene, welche durch irgend eine dieser Kanten geht, also auch jeden Punkt, welcher in irgend einer dieser Kanten liegt, und nicht nur die beiden Geraden AB, CD selbst, sondern auch jede Gerade, welche beide schneidet, entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 nur eine Kante AB des Tetraeders $ABCD$, so haben die Systeme die Ebenen ACD, BCD und jede durch die Gerade AB gehende Ebene, die Punkte A, B und jeden in der Geraden CD liegenden Punkt, dann die Geraden AB, CD und jede Gerade, welche durch irgend einen von den beiden Punkten A, B geht und die Gerade CD schneidet, entsprechend gemein. — Wenn endlich die Gerade PP_1 keine Kante des Tetraeders $ABCD$ schneidet, so haben die zu einander collineären Systeme nur die vier Eckpunkte, die vier Seiten und die sechs Kanten des Tetraeders $ABCD$ entsprechend gemein.

510. Will man zwei räumliche Systeme collinear so auf einander beziehen, dass sie die Eckpunkte des Dreiecks ABC , aber keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein haben, so nehme man in einer Geraden, welche die Ebene ABC in einem Eckpunkte A des Dreiecks ABC schneidet, noch drei Punkte D, D_1, D_2 an, so dass ADD_1D_2 ein harmonischer Wurf ist. Es sei ferner P ein ausserhalb der drei Geraden BC, BD_1, CD_1 liegender Punkt der Ebene BCD_1 und P_1 ein ausserhalb der drei Geraden BC, BD_2, CD_2 liegender Punkt der Ebene BCD_2 . Bezieht man nun die Systeme collinear so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen die Punkte A, B, C, D_1, P_1 des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte D_1 des erstern der Punkt D_2 des letztern, daher die Systeme (86) keinen von A verschiedenen Punkt der Geraden AD , also keine durch die Gerade BC gehende von ABC verschiedene Ebene und mithin auch keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein haben.

Geht die Gerade PP_1 durch den Punkt A , so haben die Systeme jedes durch diesen Punkt gehende Element und jedes in der Ebene ABC liegende Element entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 die Gerade AD in einem ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkte, so haben die Systeme die Ebene ABC und jede durch die Gerade AD gehende Ebene, den Punkt A und jeden in der Geraden BC liegenden Punkt, die beiden Geraden AD, BC und jede Gerade, welche in der Ebene ABC liegt und durch den Punkt A geht, entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 die Gerade AB von den beiden Geraden AB, AC in einem von A verschiedenen Punkte, so haben die Systeme die Ebene ACD und jede durch die Gerade AB gehende Ebene, den Punkt B und jeden in der Geraden AC liegenden Punkt, dann jede durch den Punkt A gehende Gerade der Ebene ACD und jede durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene ABC entsprechend gemein. — Liegt die Gerade PP_1 mit keiner der drei Geraden AB, AC, AD in einerlei Ebene, so haben die Systeme nur die drei Ebenen ABC, ABD, ACD , die drei Punkte A, B, C und die vier Geraden AB, AC, AD, BC entsprechend gemein.

511. Wenn p, q, q_1, q_2 vier harmonisch liegende Leitstrahlen der Regelschaar abc sind und man bezieht zwei räumliche Sy-

systeme collinear so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, q_1 des einen Systems die Geraden a, b, c, p, q_1, q_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme jeden Punkt der Geraden p , jede Ebene des Ebenenbüschels p und nicht nur die Gerade p und jede Gerade der Regelschaar abc , sondern auch jede Gerade, welche die Regelfläche in einem Punkte der Geraden p berührt, entsprechend gemein. Da nämlich die Systeme jede Gerade der Regelschaar abc aber (86) keinen von p verschiedenen Leitstrahl derselben entsprechend gemein haben, so erscheint jede Ebene des Büschels p als der Träger von zwei zu einander collineären ebenen Systemen, welche alle Punkte der Geraden p und alle Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt in der Geraden p liegt, entsprechend gemein haben.

Wenn c_1 eine vierte Gerade der Regelschaar abc ist und man zwei räumliche Systeme collinear so auf einander bezieht, dass den Geraden a, b, c, p, q, q_1 des einen Systems die Geraden a, b, c_1, p, q_1, q_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme nur die beiden Punkte ap, bp , die beiden Ebenen, ap, bp und die drei Geraden a, b, p entsprechend gemein.

512. Wenn man ausserhalb der Geraden AD , in welcher die vier Punkte A, D, D_1, D_2 harmonisch liegen, fünf Punkte B, C, E, E_1, E_2 annimmt, so dass die Gerade BC und die Ebene ADE im Punkte A sich schneiden, die Gerade EE_1 durch den Punkt D_1 , die Gerade E_1E_2 durch den Punkt D_2 geht und $A(D, E, E_1, E_2)$ ein harmonischer Wurf ist, und wenn man nun zwei räumliche Systeme collinear so auf einander bezieht, dass den Punkten B, C, D, E, E_1 des einen Systems die Punkte B, C, D_1, E_1, E_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme jeden in der Geraden AB liegenden Punkt, jede durch den Punkt A gehende Gerade der Ebene ABD und jede durch die Gerade AD gehende Ebene entsprechend gemein.

Wenn man hingegen in der Gerade AB noch einen vierten Punkt C_1 annimmt und zwei räumliche Systeme collinear so auf einander bezieht, dass den Punkten B, C, D, E, E_1 des einen die Punkte B, C_1, D_1, E_1, E_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme nur die Punkte A, B , die Geraden AB, AD und die Ebenen ABD, ADE entsprechend gemein.

513. Sollen zwei zu einander collineäre räumliche Systeme nur drei Elemente nämlich einen Punkt A , eine durch ihn gehende

Gerade s und eine durch diese Gerade gehende Ebene U entsprechend gemein haben, so nehme man in der Geraden s noch drei Punkte B, B_1, B_2 an, so dass $AB B_1 B_2$ ein harmonischer Wurf ist. Es seien ferner C, C_1, C_2 drei ausserhalb der Geraden s liegende Punkte der Ebene U , so dass die Gerade CC_1 durch den Punkt B_1 , die Gerade $C_1 C_2$ aber durch den Punkt B_2 geht und $A (B C C_1 C_2)$ ein harmonischer Wurf ist. Endlich seien D, D_1, D_2 drei ausserhalb der Ebene U liegende Punkte, so dass die Gerade DD_1 durch den Punkt C_1 , die Gerade $D_1 D_2$ aber durch den Punkt C_2 geht und $s (C D D_1 D_2)$ ein harmonischer Wurf ist. Bezieht man nun die Systeme collinear so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, D_1 des einen die Punkte A, B_1, C_1, D_1, D_2 des andern entsprechen, so haben sie nur die drei Elemente A, s, U , entsprechend gemein.

514. Sind zwei räumliche Systeme zu einander collinear, so findet, wie man sich leicht überzeugt, irgend einer der in den fünf vorigen Nummern betrachteten 13 Fälle statt. Haben die Systeme eine unebene Curve K III. Ordnung entsprechend gemein, so haben sie entweder nur einen Punkt dieser Curve oder zwei Punkte A, B derselben entsprechend gemein. Im erstern Falle haben die Systeme nur drei Elemente, im letztern aber die Eckpunkte, Seiten und Kanten eines Tetraeders $ABCD$ entsprechend gemein. In den Punkten C, D wird die Schnittlinie der Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A, B sich anschmiegen, von den der Curve in diesen Punkten sich anschmiegenden Geraden geschnitten.

515. Wenn zwei zu einander collineäre Systeme die Elemente des Tetraeders $ABCD$ entsprechend gemein haben und den Punkten P, Q des einen Systems, von welchen keiner in einer Seite des Tetraeders liegt, die Punkte P_1, Q_1 des andern entsprechen, so ist $ABCDPP_1 \propto ABCDQQ_1$.

Nach der Annahme ist, wenn die Gerade AB durch u bezeichnet wird, $u (CDPQ) \propto u (CDP_1Q_1)$, mithin auch $u (CDPP_1) \propto u (CDQQ_1)$. Bezieht man also zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen Systems die Punkte A, B, C, D, Q des andern entsprechen, so entspricht der Ebene uP_1 des erstern Systems die Ebene uQ_1 des letztern. Eben so entspricht der Ebene ACP_1 die Ebene ACQ_1 , der Ebene BCP_1 die Ebene BCQ_1 und folglich dem Punkte P_1 der Punkt Q_1 .

Auf dieselbe Weise kann, wenn U, V, U_1, V_1 vier Ebenen sind, von welchen keine durch einen Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ geht, aus $ABCDUV \propto ABCDU_1V_1$ auf $ABCDUU_1 \propto ABCDVV_1$ geschlossen werden.

516. Wenn in einem Polarsysteme den Eckpunkten des Tetraeders $ABCD$ die ihnen gegenüberliegenden Seiten desselben, den Punkten P, Q aber, von welchen keiner in einer Seite des Tetraeders liegt, die Ebenen P_1, Q_1 zugeordnet sind, so ist $ABCDPQ_1 \propto ABCDQP_1$.

Es werde die Gerade AB von den Ebenen P_1, Q_1 in den Punkten G, H geschnitten, so ist, wenn man die Gerade CD durch s bezeichnet, der Wurf $ABGH$ dem Wurfe $s (BAPQ)$ zugeordnet, daher $s (ABGH) \propto s (ABQP)$ und mithin auch $s (ABPH) \propto s (ABQG)$ ist. Bezieht man also zwei räumliche Systeme collinear so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen Systems die Punkte A, B, C, D, Q des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte H des erstern der Punkt G des letztern. Da auf diese Weise, was auch u für eine Kante des Tetraeders $ABCD$ sein mag, dem Punkte uQ_1 der Punkt uP_1 entspricht, so entspricht der Ebene Q_1 die Ebene P_1 .

§. 36.

Einfache Systeme von Flächen II. Ordnung.

517. Ein System von Flächen II. Ordnung soll ein einfaches heissen, wenn jeder Punkt, welchen zwei Flächen des Systems mit einander gemein haben, ein gemeinschaftlicher Punkt von allen ist und je zwei in Hinsicht auf zwei Flächen des Systems einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die übrigen einander conjugirt sind. Es sind hiernach auch ein Punkt und eine Ebene in Hinsicht auf alle Flächen des Systems einander zugeordnet, so wie sie in Hinsicht auf zwei Flächen des Systems einander zugeordnet sind.

Ist in der Folge von einem einfachen Linien- oder Flächensysteme die Rede, so sind immer Linien oder Flächen II. Ordnung gemeint, wenn auch dieses nicht ausdrücklich bemerkt wird.

518. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt und zwei der drei Flächen in einem und demselben Strahlenbündel enthalten sind, so ist in diesem auch die dritte enthalten. Denn die drei Flächen haben jede Gerade mit einander gemein, welche den Mittelpunkt des Strahlenbündels mit einem andern gemeinschaftlichen Punkte derselben verbindet. Gehören die drei Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so folgt der Satz auch aus 517.

Jedes einfache Liniensystem (K, K_1) wird aus jedem ausserhalb seiner Ebene liegenden Punkte S durch ein einfaches Flächensystem $S(K, K_1)$ projicirt, welches in dem Strahlenbündel S enthalten ist und ein System erster oder zweiter oder dritter Art u. s. w. heissen soll, je nachdem (K, K_1) ein System erster oder zweiter oder dritter Art u. s. w. ist. Ist in dem Systeme (K, K_1) , also in Hinsicht auf jede Linie dieses Systems dem Punkte P die Gerade p zugeordnet, so ist in dem Systeme $S(K, K_1)$ jedem Punkte der Geraden SP die Ebene $S p$ zugeordnet. Sind in dem Systeme (K, K_1) die Punkte P, Q einander conjugirt, so ist in dem Systeme $S(K, K_1)$ jedem Punkte der Geraden SP jeder Punkt der Geraden SQ conjugirt. Ist das System (K, K_1) in einem Strahlenbüschel enthalten, also ein System VI. oder VII. Art, so ist das System $S(K, K_1)$ in einem Ebenenbüschel und daher in jedem Strahlenbündel enthalten, dessen Mittelpunkt in der Axe des Ebenenbüschels liegt.

519. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei in einerlei Ebene liegenden Linien II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, aber dennoch die drei Linien nicht einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so findet einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die drei Linien sind drei Curven II. Ordnung, welche drei Punkte A, B, C in deren jedem zwei derselben sich berühren, mit einander gemein haben.

b) Zwei von den drei Linien sind Curven II. Ordnung, welche in einem Punkte A sich berühren und in zwei Punkten B, C sich schneiden. Die dritte Linie besteht aus der Geraden BC und einer der Geraden AB, AC .

c) Zwei von den drei Linien sind Curven II. Ordnung, welche

in einem Punkte A dreipunktig einander sich anschmiegen und daher noch einen Punkt B mit einander gemein haben. Die dritte Linie ist die Gerade A B.

d) Die drei Linien sind in einem und demselben Strahlenbüschel enthalten und haben nur den Mittelpunkt S desselben mit einander gemein.

Sind zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf jede der drei Linien einander conjugirt, so geht die Gerade PQ wenigstens durch einen gemeinschaftlichen Punkt derselben. In den beiden erstern der obigen Fälle sind nämlich, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte P, Q durch zwei Eckpunkte des Dreiecks A B C harmonisch getrennt. Im dritten Falle sind die Punkte P, Q entweder durch die Punkte A, B harmonisch getrennt, oder es fällt der eine mit dem Punkte A zusammen und der andere in die diesem Punkte in Hinsicht auf alle drei Linien zugeordnete Gerade. Im vierten Falle endlich fällt der eine von den beiden Punkten P, Q mit dem Punkte S zusammen.

520. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, und irgend zwei Punkte M, N, welche mit keinem gemeinschaftlichen Punkte der Flächen in einer und derselben Geraden liegen, in Hinsicht auf alle drei einander conjugirt sind, so gehören die drei Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

Jede durch die Gerade M N gehende Ebene U bestimmt mit den drei Flächen drei Linien UF, UF_1, UF_2 II. Ordnung, welche (518) einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, woraus sogleich hervorgeht, dass je zwei mit der Geraden M N in einerlei Ebene liegende und in Hinsicht auf zwei der drei gegebenen Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind. Liegen zwei Punkte P, Q, welche in Hinsicht auf zwei der drei Flächen einander conjugirt sind, mit der Geraden M N nicht in einerlei Ebene, so haben die drei Flächen entweder die Gerade PQ mit einander gemein, daher die Punkte P, Q auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, oder man kann durch die Gerade M N eine Ebene U und durch die Gerade P Q eine Ebene V legen, so dass die Schnittlinie dieser Ebenen durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der drei Flächen geht. Da es nun in der Geraden UV zwei Punkte giebt, welche in Hinsicht auf jede

der Linien UF , UF_1 , UF_2 und also auch in Hinsicht auf jede der Flächen F , F_1 , F_2 einander conjugirt sind, so sind auch die Punkte P , Q in Hinsicht auf alle drei Flächen einander conjugirt.

Bestimmt irgend eine Ebene mit drei Flächen II. Ordnung, deren keine zwei einen ausserhalb der dritten liegenden Punkt mit einander gemein haben, drei Linien, welche einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören und höchstens vier Punkte mit einander gemein haben, so gehören die drei Flächen, wie aus dem obigen Satze folgt, einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

521. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen F , F_1 , F_2 II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt und die Flächen nicht in einem und demselben Strahlenbündel enthalten sind, so gehören sie einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

Giebt es eine Ebene U , welche irgend eine der drei Flächen in zwei Geraden schneidet, deren Schnittpunkt ausserhalb der beiden andern liegt, so gehören (519) die drei Linien UF , UF_1 , UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme und daher (520) die drei Flächen F , F_1 , F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an. Sind F , F_1 , F_2 drei Kegelflächen, welche eine Gerade h mit einander gemein haben, so berührt die in dieser Geraden der Fläche F sich anschmiegende Ebene E schon desshalb auch wenigstens eine von den Flächen F_1 , F_2 , weil diese keinen ausserhalb der Geraden h liegenden Punkt der Ebene E mit einander gemein haben. Da hiernach (252) zwei der drei Kegelflächen und folglich alle drei in einer Curve II. Ordnung sich schneiden, so schmiegt die Ebene E in der Geraden h auch der dritten sich an. Ist nun U eine Ebene, welche die eine von den drei Kegelflächen in zwei Geraden, die beiden andern aber in Curven schneidet, so gehören wieder, da diese im Punkte hU eine und dieselbe Gerade EU berühren, die drei Linien UF , UF_1 , UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme und also die Flächen F , F_1 , F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

522. Wenn drei Flächen II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber doch jeder Punkt, welchen irgend zwei derselben mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, so findet nach 519 und 521 einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die drei Flächen sind drei Kegelflächen, welche drei Strahlen, in deren jedem zwei derselben sich berühren, mit einander gemein haben.

b) Zwei von den drei Flächen sind Kegelflächen, welche in einer Geraden a sich berühren und in zwei Geraden b, c sich schneiden. Die dritte Fläche besteht aus der Ebene bc und einer der Ebenen ab, ac .

c) Zwei von den drei Flächen sind Kegelflächen, welche in einem Strahle a dreistrahlig einander sich anschmiegen und daher noch einen Strahl b mit einander gemein haben. Die dritte Fläche ist die Ebene ab .

d) Die drei Flächen sind in einem und demselben Ebenenbüschel enthalten und haben nur die Axe dieses Büschels mit einander gemein.

Sind zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf alle drei Flächen einander conjugirt, ohne durch zwei gemeinschaftliche Punkte derselben harmonisch getrennt zu sein, so haben die drei Flächen einen von den beiden Punkten P, Q mit einander gemein.

523. Schneidet eine Gerade u zwei in einerlei Ebene liegende Linien K, K_1 II. Ordnung in denselben zwei Punkten, so gehört dem einfachen Liniensystem (K, K_1) entweder die Gerade u oder eine Linie an, welche aus der Geraden u und noch einer Geraden besteht. Dasselbe ist der Fall, wenn die Gerade u nur durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Linien K, K_1 geht und mit keiner derselben, ob sie gleich mit beiden in einerlei Ebene liegt, noch einen Punkt gemein hat.

Ist dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Linien K, K_1 eine und dieselbe Gerade zugeordnet, so ist, wenn nicht das Liniensystem (K, K_1) selbst, doch eine Linie desselben in dem Strahlenbüschel S enthalten.

524. Wenn eine Ebene U mit zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung eine und dieselbe Linie bestimmt, so dass also UF mit UF_1 identisch ist, so gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) entweder die Ebene U oder eine Fläche an, welche aus der Ebene U und noch einer Ebene V besteht.

Sind nämlich die beiden Flächen F, F_1 in einem und demselben Strahlenbüschel enthalten, so liegt der Mittelpunkt S desselben in der Ebene U . Ist nun E eine Ebene, welche nicht durch den Punkt S

geht, so findet der erstere oder letztere der im Satze erwähnten Fälle statt, je nachdem (523) dem einfachen Liniensysteme (EF, EF_1) die Gerade EU oder eine Linie angehört, welche aus dieser Geraden und noch einer Geraden besteht. Sind aber die Flächen F, F_1 nicht in einem und demselben Strahlenbündel enthalten so hat man zu unterscheiden, ob jeder gemeinschaftliche Punkt derselben in der Linie UF liegt, oder ob sie auch Punkte, welche ausserhalb der Ebene U liegen, mit einander gemein haben. Im erstern dieser Fälle gehört (521) dem Flächensysteme (F, F_1) die Ebene U an. Im letztern Falle giebt es eine Ebene V , welche durch jeden ausserhalb der Ebene U liegenden gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und mit keiner derselben einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat, woraus der Satz folgt.

Anmerkung. Gehören die Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so ist es einerlei, ob man dasselbe, da es durch zwei seiner Flächen bestimmt ist, durch (F, F_1) oder (F, F_2) oder (F_1, F_2) bezeichnet.

525. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem ausserhalb derselben liegenden Punkte S eine und dieselbe Ebene U zugeordnet ist, so ist eine Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten.

Haben nämlich die Flächen F, F_1 keinen ausserhalb der Ebene U liegenden Punkt mit einander gemein, so bestimmt diese Ebene entweder mit den beiden Flächen eine und dieselbe Linie, oder es fällt die Ebene U mit der einen von den beiden Flächen F, F_1 zusammen, oder es sind F, F_1 zwei Kegelflächen, welche eine in der Ebene U liegende Gerade aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt mit einander gemein haben. In jedem dieser Fälle wird die den beiden Flächen F, F_1 gemeinschaftliche Linie FF_1 aus dem Punkte S durch eine Fläche F_2 projecirt, welche mit keiner von den beiden Flächen F, F_1 einen ausserhalb der Ebene U , folglich auch mit keiner einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat und daher dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört. Wenn aber die Flächen F, F_1 irgend einen ausserhalb der Ebene U liegenden Punkt A mit einander gemein haben, so haben sie auch den Punkt B mit einander gemein, welcher vom erstern durch den Punkt S und einen Punkt T der Ebene U harmonisch getrennt ist. In die-

sem Falle ist F_2 die Fläche, welche aus dem Punkte S die durch den Punkt T gehende Linie K des einfachen Liniensystems (UF, UF_1) projecirt. Dass nämlich UF, UF_1 zwei verschiedene Linien sind, folgt aus 444. Um aber zu beweisen, dass auch jeder ausserhalb der Ebene U und ausserhalb der Geraden SA liegende Punkt C , welchen zwei der drei Flächen F, F_1, SK mit einander gemein haben, auch in der dritten liege, sei P der Punkt, in welchem die Gerade AC und die Ebene U sich schneiden, und p die Gerade, welche vom Punkte P durch die Geraden SA, SC harmonisch getrennt und daher dem Punkte P in Hinsicht auf jene zwei Flächen conjugirt ist. Da nun in Hinsicht auf zwei der drei Linien UF, UF_1, K , folglich auch in Hinsicht auf die dritte dem Punkte P der Punkt Up conjugirt ist, so sind diese Punkte und mithin auch der Punkt P und die Gerade p auch in Hinsicht auf die dritte Fläche einander conjugirt, daher auch diese durch den Punkt C geht.

526. Wenn zwei Ebenen U, V mit zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung vier verschiedene Linien UF, UF_1, VF, VF_1 bestimmen und zwei Linien II. Ordnung, von welchen die eine dem einfachen Liniensysteme (UF, UF_1) und die andere dem einfachen Liniensysteme (VF, VF_1) angehört, irgend einen ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegenden Punkt S mit einander gemein haben, so haben sie entweder die Schnittlinie h der Ebene U, V mit einander gemein, oder sie schneiden diese Gerade in denselben zwei Punkten S, T oder es hat keine von den beiden Linien mit der Geraden h einen von S verschiedenen Punkt gemein. Der erste dieser drei Fälle findet statt, wenn die Gerade h die Flächen F, F_1 in denselben zwei Punkten schneidet, so wie auch, wenn die Gerade h durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und mit keiner derselben noch einen Punkt gemein hat. Der zweite Fall findet statt, wenn die Gerade h durch einen gemeinschaftlichen Punkt T der Flächen F, F_1 geht und wenigstens die eine auch in einem ausserhalb der andern liegenden Punkte schneidet, so wie auch, wenn die Gerade h durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und in dem involutorischen Gebilde $hF.hF_1 \dots$ dem Punkte S ein anderer Punkt T zugeordnet ist. Der dritte Fall findet statt, wenn die Gerade h durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und in dem involutorischen Gebilde $hF.hF_1 \dots$ der Punkt S sich selbst zugeord-

net ist. Nur im ersten und dritten Falle giebt es in der Gerade h einen Punkt, welcher dem Punkte S in Hinsicht auf jede der beiden Flächen F, F_1 conjugirt ist, daher im zweiten Falle die Gerade h mit der Schnittlinie derjenigen zwei Ebenen, von welchen die eine in Hinsicht auf die Fläche F und die andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 dem Punkte S zugeordnet ist, keinen Punkt gemein hat.

527. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem ausserhalb derselben liegenden Punkte S nur eine Gerade s conjugirt ist, so gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) eine Fläche F_2 an, welche von jeder durch den Punkt S gehenden aber ausserhalb der Ebene Ss liegenden Geraden im Punkte S und in noch einem Punkte geschnitten wird.

I. Bestimmt die Ebene U , welche aus dem Punkte S die Gerade s projecirt, mit den beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Linie, so besteht (524) die im Satze erwähnte Fläche aus der Ebene U und einer nicht durch den Punkt S gehenden Ebene, weil, wenn eine Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten wäre, die dem Punkte S in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Ebene demselben Punkt (517) auch in Hinsicht auf die Fläche F_1 zugeordnet sein würde, was gegen die Annahme ist.

II. Sind UF, UF_1 zwei verschiedene Linien, so hat man zu unterscheiden, ob die durch den Punkt S gehende Linie L des einfachen Liniensystems (UF, UF_1) eine Gerade f oder (523) der Inbegriff von zwei im Punkte S sich schneidenden Geraden f, g ist. In jedem dieser Fälle bestimmt indessen jede durch den Punkt S gehende von U verschiedene Ebene V mit den Flächen F, F_1 ein einfaches Liniensystem (VF, VF_1) , in welchem dem Punkte S nur der Punkt Vs conjugirt ist, daher die durch den Punkt S gehende Linie des Systems entweder aus der Geraden UV und einer nicht durch den Punkt S gehenden Geraden besteht oder eine Curve II. Ordnung ist, welche die Ebene U im Punkte S berührt, je nachdem nämlich (526) die Gerade UV in die Linie L fällt oder mit dieser Linie nur den Punkt S gemein hat. Sind also A, B, C drei Ebenen, welche die Ebene U in der Geraden f schneiden, so liegen in ihnen drei Gerade a, b, c , so dass $f + a$ eine Linie des Systems (AF, AF_1) , $f + b$ eine Linie des Systems (BF, BF_1) und $f + c$ eine

Linie des Systems (CF, CF_1) ist. Ist ferner E eine Ebene, welche mit der Linie L nur den Punkt S gemein hat, so ist die durch diesen Punkt gehende Linie K des einfachen Liniensystems (EF, EF_1) eine Curve II. Ordnung, welche die Ebene U im Punkte S berührt und (526) durch die drei Punkte Ua, Ub, Uc geht, woraus man schliessen kann, dass diese Punkte nicht in einer und derselben Geraden und mithin die drei Geraden a, b, c nicht in einerlei Ebene liegen. Wenn nun die Linie L die Gerade f selbst ist, mithin jede durch den Punkt S aber nicht durch die Gerade f gehende Ebene die Geraden a, b, c in drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden Punkten schneidet, so wird die Gerade f von den Geraden a, b, c in einem und demselben Punkte M geschnitten. In diesem Falle gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) die Kegelfläche F_2 an, welche aus dem Punkte M die Curve K projecirt, weil, was auch V für eine durch den Punkt S gehende Ebene sein mag, die durch den Punkt S gehende Linie des einfachen Liniensystems (VF, VF_1) mit der Linie VF_2 zusammenfällt. Wenn aber die Linie L aus der Geraden f und noch einer Geraden g besteht, so liegt in jeder Ebene H , welche die Ebene U in der Geraden g schneidet, eine nicht durch den Punkt S gehende Gerade, welche mit der Geraden g eine Linie des einfachen Liniensystems (HF, HF_1) bildet und daher (526) mit jeder der Linien a, b, c, K einen Punkt gemein hat. In diesem Falle liegen also die Linien f, g, a, b, c, K in einer und derselben Regelfläche F_2 , welche dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört, weil, was auch V für eine durch den Punkt S gehende Ebene sein mag, die Linien VF, VF_1, VF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören.

528. Durch zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt S ist eine dritte Fläche F_2 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört und durch den gegebenen Punkt geht.

Ist dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Ebene zugeordnet, so ist (525) die Fläche F_2 in dem Strahlenbündel S enthalten. Giebt es aber nur eine Gerade s , welche dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1 , mithin auch in Hinsicht auf jede dritte Fläche des Systems (F, F_1) conjugirt ist, so ist (527) in Hinsicht auf die Fläche F_2 dem Punkte S nur die

Ebene Ss zugeordnet. In diesem Falle schneidet jede durch den Punkt S gehende aber ausserhalb der Ebene Ss liegende Gerade h die Fläche F_2 im Punkte S und in noch einem Punkte T , welcher entweder ein gemeinschaftlicher Punkt der Flächen F, F_1 oder, wenn die Gerade h durch keinen solchen Punkt geht, in dem involutorischen Gebilde $hF, hF_1 \dots$ dem Punkte S zugeordnet ist.

Durch ein einfaches Flächensystem (F, F_1) und eine Gerade h , welche durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen geht, sind (440) zwei Punkte P, Q bestimmt, welche nämlich in der gegebenen Geraden liegen und in Hinsicht auf alle Flächen des Systems einander conjugirt sind, daher diesem zwei Flächen angehören, deren jede mit der Geraden h nur einen Punkt, die eine nur den Punkt P , die andere nur den Punkt Q gemein hat. Jede dritte Fläche des Systems schneidet die Gerade h in zwei Punkten, welche durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind. Sind F, F_1, F_2 irgend drei Flächen des Systems, so ist hF, hF_1, hF_2 eine Involution.

529. Durch ein einfaches Flächensystem (F, F_1) und zwei in diesem Systeme einander nicht conjugirte Punkte A, B ist eine Fläche F_2 des Systems bestimmt, in Hinsicht auf welche die gegebenen Punkte einander conjugirt sind.

Es sei U eine durch die Gerade AB gehende Ebene, welche mit den Flächen F, F_1 zwei verschiedene Linien UF, UF_1 bestimmt, und K diejenige Linie des einfachen Liniensystems (UF, UF_1) , in Hinsicht auf welche (349) die Punkte A, B einander conjugirt sind. Giebt es nun in der Linie K irgend einen Punkt C , durch welchen keine andere Linie des Systems (UF, UF_1) geht, so ist F_2 die durch den Punkt C gehende Fläche des Systems (F, F_1) . Diese Fläche bestimmt nämlich mit der Ebene U eine Linie UE_2 , welche (441) dem einfachen Liniensysteme (UF, UF_1) angehört und durch den Punkt C geht, mithin mit K zusammenfällt, daher die Punkte A, B auch in Hinsicht auf die erwähnte Fläche einander conjugirt sind. Wenn aber, was auch U für eine durch die Gerade A, B gehende Ebene sein mag, (UF, UF_1) ein Liniensystem VII. Art und diejenige Linie des Systems, in Hinsicht auf welche die Punkte A, B einander conjugirt sind, eine Gerade ist, so ist (F, F_1) ein Flächensystem VII. Art und F_2 die Ebene, welche alle Flächen desselben mit einander gemein haben.

530. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem Punkte S eine und dieselbe Ebene U zugeordnet und keine von den beiden Flächen F, F_1 selbst in dem Strahlenbündel S enthalten ist, so ist in diesem doch eine Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) enthalten.

Es sei P irgend ein ausserhalb der Ebene U liegender Punkt, so ist diejenige Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) , in Hinsicht auf welche (529) dem Punkte S der Punkt P conjugirt ist, in dem Strahlenbündel S enthalten.

Ist S ein Punkt und (F, F_1) irgend ein einfaches Flächensystem, so ist in diesem dem Punkte S entweder jede Ebene oder nur eine Ebene zugeordnet oder nur eine Gerade u conjugirt, je nachdem nämlich jede Fläche oder nur eine Fläche oder gar keine Fläche des Systems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten ist. Im letzten Falle ist, wenn der Punkt P ausserhalb der Geraden u liegt, dem Punkte S nur in Hinsicht auf eine Fläche des Systems (F, F_1) der Punkt P conjugirt und also die Ebene uP zugeordnet.

531. Durch zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung und eine Gerade h , welche beide Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkt S aber jede derselben auch in einem ausserhalb der andern liegenden Punkte schneidet, ist eine dritte Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört und mit der Geraden h nur den Punkt S gemein hat.

Es sei P irgend ein von S verschiedener Punkt der Geraden h , so hat diejenige Fläche F_2 des Systems (F, F_1) , in Hinsicht auf welche dem Punkte S der Punkt P und also jeder Punkt der Geraden h conjugirt ist, mit dieser Linie nur den Punkt S gemein. Würde nämlich die Fläche F_2 durch die Gerade h gehen, so wäre jeder Punkt, welchen diese Linie mit einer andern Fläche des Systems (F, F_1) gemein hat, ein gemeinschaftlicher Punkt von allen Flächen desselben, was gegen die Annahme ist.

532. Wenn (F, F_1) ein einfaches Flächensystem, h aber eine Gerade ist, welche wenigstens durch einen gemeinschaftlichen Punkt S der Flächen geht, so findet einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die Flächen des Systems (F, F_1) haben die Gerade h mit einander gemein.

b) Die Gerade h liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1)

und wird von allen andern Flächen desselben in denselben zwei Punkten geschnitten. Schneiden die Flächen F, F_1 die Gerade h in denselben zwei Punkten, so geht diejenige Fläche des Systems (F, F_1) , welche mit der Geraden h irgend einen dritten Punkt gemein hat, durch die Gerade h .

c) Die Gerade h liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1) hat aber mit keiner andern Fläche desselben einen von S verschiedenen Punkt gemein. Wenn keine von den beiden Flächen F, F_1 mit der Geraden h einen von S verschiedenen Punkt gemein hat, und also diesem Punkte in dem Systeme (F, F_1) die Gerade h conjugirt ist, so geht diejenige Fläche des Systems, welche mit der Geraden h irgend einen von S verschiedenen Punkt gemein hat, durch die Gerade h .

d) Eine Fläche des Systems (F, F_1) hat mit der Geraden h nur den Punkt S gemein, während jede andere Fläche desselben die Gerade h im Punkte S und noch einem Punkte schneidet. In diesem Falle sollen das Flächensystem (F, F_1) und das gerade Gebilde h zu einander perspektivisch heissen, wenn auf jeden von S verschiedenen Punkt dieses Gebildes die durch ihn gehende Fläche des Systems, auf den Punkt S aber diejenige Fläche desselben bezogen wird, welche mit der Geraden h keinen andern Punkt gemein hat.

533. Wenn (F, F_1) ein einfaches Flächensystem, U aber eine Ebene ist, so findet einer von folgenden drei Fällen statt:

a) Die Flächen des Systems (F, F_1) haben die Ebene U mit einander gemein.

b) Die Ebene U liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1) und bestimmt mit allen übrigen Flächen desselben eine und dieselbe Linie.

c) Die Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem (UF, UF_1) , welches auch durch $U(F, F_1)$ bezeichnet werden kann und zu dem Flächensysteme perspektivisch heissen soll, indem nicht nur jede Fläche des Systems (F, F_1) durch eine Linie des Systems (UF, UF_1) geht, sondern auch jeder Linie K dieses Systems eine Fläche des Systems (F, F_1) entspricht, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K bestimmt. Sind die Punkte A, B nur in Hinsicht auf die Linie K des Systems (UF, UF_1) einander conjugirt, so sind sie auch nur in Hinsicht auf eine Fläche des Sy-

stems (F, F_1) einander conjugirt und diese Fläche bestimmt mit der Ebene U die Linie K .

534. Wenn drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und drei andere Flächen G, G_1, G_2 II. Ordnung, von welchen die erste dem Systeme (F_1, F_2) , die zweite dem Systeme (F, F_2) und die dritte dem Systeme (F, F_1) angehört, irgend einen ausserhalb der drei erstern liegenden Punkt S mit einander gemein haben, so gehören die drei Flächen G, G_1, G_2 einem und demselben vierten einfachen Flächensysteme an.

Es sei U irgend eine durch den Punkt S gehende Ebene. Bestimmt diese Ebene mit den drei Flächen F, F_1, F_2 eine und dieselbe Linie, so haben (533) die Flächen G, G_1, G_2 die Ebene U mit einander gemein. Fallen nur zwei der Linien UF, UF_1, UF_2 in einander, so liegt die Ebene U nur in einer der drei Flächen G, G_1, G_2 , bestimmt aber mit den beiden übrigen eine und dieselbe Linie. Sind UF, UF_1, UF_2 drei verschiedene Linien, welche einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so bestimmt die Ebene U mit den drei Flächen G, G_1, G_2 eine und dieselbe Linie. Wenn endlich UF, UF_1, UF_2 drei verschiedene Linien sind, welche nicht einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so sind (351) UG, UG_1, UG_2 drei Linien eines und desselben einfachen Liniensystemes. Da hiernach jeder in der Ebene U liegende Punkt, welchen zwei der drei Flächen G, G_1, G_2 mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, und je zwei in der Ebene U liegende Punkte, welche in Hinsicht auf zwei der drei Flächen G, G_1, G_2 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, U aber jede durch den Punkt S gehende Ebene sein kann, so folgt der Satz.

535. Durch drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber mit einer Ebene U eine und dieselbe Linie bestimmen, sind (534) drei in einer und derselben Geraden sich schneidende Ebenen V, V_1, V_2 bestimmt, so dass die Fläche $U + V$ dem Systeme (F_1, F_2) , die Fläche $U + V_1$ dem Systeme (F, F_2) und die Fläche $U + V_2$ dem Systeme (F, F_1) angehört. Jeder Punkt, welchen die Gerade V, V_1 mit irgend einer der drei Flächen F, F_1, F_2 gemein hat, liegt auch in den beiden übrigen. Schneidet eine Gerade h die Ebene U in

einem ausserhalb der Linie UF liegenden Punkte A und die drei Ebenen V, V_1, V_2 in einem und demselben ebenfalls ausserhalb der Flächen F, F_1, F_2 liegenden Punkte B , so sind $AB \cdot hF \cdot hF_1$, $AB \cdot hF \cdot hF_2$ Involutionen, daher auch $AB \cdot hF_1 \cdot hF_2$ eine Involution ist.

536. Jedem einfachen Flächensysteme (F, F_1) gehört wenigstens eine Fläche an, welche keine Regelfläche, also entweder eine Kegelfläche oder der Inbegriff von zwei Ebenen oder eine Ebene ist.

Wenn nämlich F, F_1 zwei Regelflächen sind, so kann man drei räumliche Systeme projektivisch so auf einander beziehen, dass von je drei homologen Elementen P, P_1, P_2 derselben das erste und zweite in Hinsicht auf die Regelfläche F , das erste und dritte aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 einander zugeordnet sind, mithin jedem Elemente, welches das zweite und dritte System entsprechend gemein haben, in Hinsicht auf beide Regelflächen ein und dasselbe Element zugeordnet ist. Da nun (508) zwei zu einander collineäre räumliche Systeme wenigstens einen Punkt entsprechend gemein haben, so giebt es wenigstens einen Punkt S , welchem in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Ebene zugeordnet ist, woraus (530) der Satz folgt.

§. 37.

Verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen. — Linien
IV. Ordnung.

537. Die in Strahlenbündeln enthaltenen einfachen Flächensysteme zerfallen (518) in 8, die übrigen aber in 14 Arten, so dass es im Ganzen 22 Arten von einfachen Flächensystemen giebt.

Bestimmt eine Linie L , welche auch der Inbegriff von mehreren Linien sein kann, mit jedem nicht in ihr liegenden Punkte P eine Fläche II. Ordnung, welche nämlich durch die Linie L und durch den Punkt P geht, so gehören alle Flächen F, F_1, F_2 u. s. w. II. Ordnung, welche durch die Linie L gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme an. Denn durch jeden ausserhalb der Linie L

liegenden Punkt P geht nur eine Fläche des Systems (F, F_1) und diess ist die Fläche, welche durch die Linie L und den Punkt P bestimmt ist.

538. Durch zwei Paar Gegenkanten AB, CD, AC, BD eines Tetraeders ist ein einfaches Flächensystem IX. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche angehört, welche durch die vier gegebenen Geraden geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den Ebenen BCA, BCD , eine andere F_1 aus den Ebenen ADB, ADC , während alle übrigen Flächen desselben Regelflächen sind. Sind die Punkte B, C durch die Punkte M, N und die Punkte A, D durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt, so ist in Hinsicht auf jede der Flächen F, F_1 und also in dem Systeme (F, F_1) jedem Eckpunkte des Tetraeders $MNPQ$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, woraus hervorgeht, dass in dem Systeme unendlich viele Polartetraeder enthalten sind.

Jede Ebene U , welche mit keiner Seite des Tetraeders $ABCD$ zusammenfällt, bestimmt mit dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem $U(F, F_1)$ und zwar ein Liniensystem I. oder II. oder III. oder VIII. Art, je nachdem die Ebene durch keinen oder nur durch einen Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ oder durch eine von den beiden Kanten AD, BC oder durch eine der vier übrigen Kanten geht. — Sind A, D zwei reelle, B, C aber zwei einander conjungirte imaginäre Punkte, so geht durch jeden reellen Punkt, welcher weder in der Geraden AD noch in einer von den beiden Ebenen ABC, DBC liegt, eine reelle Fläche des Systems (F, F_1) , welche die Ebene ABC im Punkte A und die Ebene DBC im Punkte D berührt.

539. Durch eine Fläche F , welche aus zwei Ebenen G, H besteht, und eine Regelfläche F_1 , welche durch die Schnittlinie s der beiden Ebenen geht, also die eine G in noch einer Geraden g und ebenso die andere H in noch einer Geraden h schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) X. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämtlich Regelflächen sind, welche (521) in der Geraden s sich berühren und in den Geraden g, h , sich schneiden, daher in dem Systeme jedem Punkte der Geraden s eine durch dieselbe gehende Ebene zugeordnet ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem

$U(F, E_1)$ und zwar ein System II. oder IV. oder VII. oder VIII. Art, je nachdem die Ebene U die drei Geraden s, g, h in drei Punkten oder in zwei Punkten schneidet, oder durch die Gerade s oder durch eine von den beiden Geraden g, h geht.

540. Durch eine Ebene F und eine Regelfläche F_1 , welche die Ebene F in zwei Geraden p, q schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XI. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämtlich Regelflächen sind, welche in den Geraden p, q sich berühren. Jedem Punkte der Ebene F ist in dem Systeme eine durch den Punkt p, q gehende Ebene zugeordnet.

Jede von E verschiedene Ebene U bestimmt mit dem Flächensystem (F, F_1) ein einfaches Liniensystem und zwar ein System III. oder V. oder VII. Art, je nachdem die Ebene U die Geraden p, q in zwei Punkten oder im Punkte p, q schneidet oder durch eine dieser Geraden geht.

541. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Gerade SA, SB , welche zwei Punkte A, B der Curve aus einem ausserhalb ihrer Ebene liegenden Punkte S projeciren, ist ein einfaches Flächensystem XII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Geraden geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, SAB , eine andere F_1 ist die Kegelfläche, welche aus dem Punkte S die Curve K projecirt, jede dritte Fläche des Systems ist eine Regelfläche. Dem Punkte S ist in dem Systeme die Ebene SAB , jedem Punkte der Geraden AB aber die Ebene zugeordnet welche ihm in Hinsicht auf die Kegelfläche F_1 zugeordnet ist.

Jede Ebene U , welche ausserhalb der Fläche F liegt, bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt S geht, ein System II. oder III. oder VII. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. oder III. oder IV. Art ist.

(182) 542. Durch zwei sich schneidende Gerade p, q und eine Curve K II. Ordnung, welche die Ebene, in der die beiden Geraden liegen, im Schnittpunkte derselben berührt aber in diesem Punkte keiner der Geraden sich anschmiegt, ist ein einfaches Flächensystem XIII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Geraden

geht. Die Flächen dieses Systems sind mit Ausnahme derjenigen, welche aus den beiden Ebenen K, pq besteht, sämtlich Regelflächen. Jedem Punkte, welcher in der Schnittlinie der erwähnten Ebenen liegt, ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine Regelfläche des Systems zugeordnet ist.

Jede Ebene U , welche mit keiner der Ebenen K, pq zusammenfällt, bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt pq geht, ein System IV. oder V. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. Art ist.

543. Durch eine Fläche F , welche aus zwei Ebenen G, H besteht, und eine Kegelfläche F_1 , welche die Ebene G in einer Geraden g berührt, die Ebene H aber in einer Curve K II. Ordnung schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XIV. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämtlich Kegelflächen sind, welche die Ebene G in der Geraden g berühren und durch die Curve K gehen. Jedem Punkte der Geraden g ist in dem Systeme die Ebene G , jedem Punkte der Geraden GH aber die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine Kegelfläche des Systems zugeordnet ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem Systeme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt gH geht, ein System IV. oder V. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System II. oder III. Art ist.

544. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche zwei Punkte A, B mit einander gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, ist ein einfaches Flächensystem XV. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die beiden gegebenen Curven geht. Eine Fläche dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, K_1 , zwei andere Flächen F, F_1 desselben sind Kegelflächen, alle übrigen Flächen des Systems aber Regelflächen. Sind S, S_1 die Mittelpunkte der erwähnten Kegelflächen und P, Q irgend zwei Punkte, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, so ist in dem Systeme jedem Eckpunkte des Tetraeders $PQSS_1$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, daher in dem Systeme unendlich viele Polartetraeder enthalten sind.

Jede Ebene U , welche mit keiner der Ebenen K, K_1 zusammenfällt, bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch keinen von den beiden Punkten A, B geht, ein System I. oder II. oder III. Art ist. Schneidet die Ebene U die Gerade AB in einem der Punkte A, B so ist $U (F, F_1)$ ein System II. oder IV. oder VI. Art. Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade AB geht, so ist $U (F, F_1)$ ein System III. Art.

545. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche einer Geraden s in einem und demselben Punkte A sich anschmiegen aber nicht in einerlei Ebene liegen, ist ein einfaches Flächensystem XVI. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die beiden gegebenen Curven geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, K_1 , eine andere Fläche F_1 desselben ist eine Kegelfläche, die übrigen Flächen des Systems sind Regelflächen. Jedem Punkte der Geraden s ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine krumme Fläche desselben zugeordnet ist. Dem Mittelpunkte der Kegelfläche F_1 ist die Ebene zugeordnet, welche von ihm durch die Ebenen K, K_1 harmonisch getrennt ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt A geht, ein System II. oder V. oder VI. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. oder III. Art ist.

546. Durch eine Ebene F und eine Kegelfläche F_1 , welche die gegebene Ebene in einer Curve K II. Ordnung schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XVII. Art bestimmt. Jede dritte Fläche dieses Systems ist eine Regelfläche, welche die Kegelfläche F_1 in der Curve K berührt. Je zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirte Punkte A, B , von welchen keiner in der Curve liegt, sind zwei Eckpunkte eines in dem Systeme (F, F_1) enthaltenen Polartetraeders $ABCS$. Der Punkt C ist der Pol der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K , der Punkt S aber der Mittelpunkt der Kegelfläche F_1 .

Jede von F verschiedene Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene

U der Kegelfläche F_1 sich anschmiegt, ein System VI. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System III. oder V. Art ist.

547. Wenn F eine Ebene und F_1 entweder der Inbegriff von zwei Ebenen oder ebenfalls eine Ebene ist, so ist (F, F_1) ein einfaches Flächensystem III. oder VI. oder VII. Art. — Gehören einem einfachen Flächensysteme wenigstens zwei Flächen an, deren jede aus zwei Ebenen besteht, während keine Fläche des Systems eine Ebene ist, so ist dasselbe ein System I. oder II. oder VIII. oder IX Art. — Ist eine Fläche eines einfachen Flächensystems eine Ebene, jede andere Fläche desselben aber eine krumme Fläche, so ist dasselbe ein System V. oder XI. oder XVII. Art. — Ist eine Fläche eines einfachen Flächensystems der Inbegriff von zwei Ebenen, jede andere Fläche desselben aber eine krumme Fläche, so unterscheide man, ob die krummen Flächen des Systems durch die Schnittlinie jener Ebenen gehen oder diese Gerade in zwei Punkten schneiden oder in einem Punkte berühren. Im ersten dieser Fälle ist das Flächensystem ein System IV. oder X. Art, im zweiten ein System XII. oder XV. Art, im dritten ein System XIII. oder XIV. oder XVI. Art.

Es sind hiernach nur noch einfache Flächensysteme zu betrachten, deren Flächen sämtlich krumme Flächen sind.

548. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade, welche mit der Curve zwei Punkte A, B gemein hat, ist ein einfaches Flächensystem XVIII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die beiden gegebenen Linien geht. Zwei Flächen F, F_1 dieses Systems sind Kegelflächen, alle übrigen Flächen desselben aber Regelflächen. Die Ebene, welche die Curve K im Punkte A berührt und im Punkte B schneidet, ist in dem Flächensysteme dem Punkte A , die Ebene aber, welche die Curve im Punkte B berührt und im Punkte A schneidet, dem Punkte B zugeordnet. Jede Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme ein einfaches Liniensystem.

Geht die Ebene U durch keinen von den beiden Punkten A, B , so ist $U (F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder IV. Art, je nachdem nämlich die Ebene mit der Curve K drei Punkte oder zwei Punkte oder nur einen Punkt gemein hat. Wenn aber die Ebene U die Gerade AB in einem von den beiden Punkten A, B schneidet, so ist $U (F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder III. oder IV. oder V. Art

Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade AB geht, so ist U (F, E_1) ein Liniensystem VII. oder VIII. Art.

549. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade h , welche der Curve in einem Punkte A sich anschmiegt, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XIX. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die beiden gegebenen Linien geht. Die Flächen dieses Systems sind mit Ausnahme der Kegelfläche AK sämtlich Regelflächen. Dem Punkte A ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche in ihm der Curve K sich anschmiegt.

Jede Ebene U bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U nicht durch den Punkt A geht, ein System I. oder II. oder IV. Art ist. Schneidet aber die Ebene U die Gerade h im Punkte A , so ist U (F, F_1) ein System II. oder III. Art. Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade h geht, so ist U (F, F_1) ein System VII. oder VIII. Art.

550. Wenn drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber doch die dritte durch alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden erstern geht, so liegen diese entweder alle in einerlei Ebene oder in einer Linie III. Ordnung, welche aus drei Geraden oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung zusammengesetzt ist.

Wenn nämlich die erwähnten Punkte nicht alle in einerlei Ebene liegen, so sei S ein Punkt, welcher ausserhalb der drei Flächen aber mit zwei gemeinschaftlichen Punkten A, B derselben in einer und derselben Geraden liegt. Es sei ferner G_2 die durch den Punkt S gehende Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) und G_1 die durch den Punkt S gehende Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_2). Da nun die Flächen G_1, G_2 die Gerade AB und unendlich viele ausserhalb dieser Geraden und überdiess nicht in einerlei Ebene liegende Punkte mit einander gemein haben, so schneiden sie sich in der Geraden AB und in einer Linie FF_1 III. Ordnung, welche entweder aus drei Geraden oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung besteht. Dass nämlich FF_1 keine Curve III. Ordnung ist, folgt aus 477.

551. Die Schnittlinie E, F_1 von zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung, deren gemeinschaftliche Punkte weder in einerlei Ebene noch

in einer Ebene und einer Geraden liegen, soll eine unebene Linie IV. Ordnung heissen. Alle Flächen II. Ordnung, welche durch eine und dieselbe unebene Linie K IV. Ordnung gehen, gehören (550) einem und demselben einfachen Flächensysteme an, welches also durch die Linie K bestimmt ist. Mit jedem nicht in ihr liegenden Punkte bestimmt die Linie K eine Fläche II. Ordnung, welche nämlich durch die gegebene Linie und durch den gegebenen Punkt geht.

Besteht eine unebene Linie IV. Ordnung aus vier Geraden, so sind diese entweder die vier Kanten eines Vierkants oder zwei Paar Gegenkanten eines Tetraeders. Die übrigen Fälle, in welchen eine unebene Linie IV. Ordnung aus andern Linien zusammengesetzt ist, nämlich entweder aus zwei Geraden und einer Curve II. Ordnung oder aus zwei Curven II. Ordnung oder aus einer Geraden und einer Curve III. Ordnung besteht, sind in 541, 542, 544, 545, 548 und 549 betrachtet worden. Eine unebene Curve IV. Ordnung hat mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte und mit keiner Ebene mehr als vier Punkte gemein.

552. Zwei Punkte oder auch ein Punkt und eine Gerade sollen in Hinsicht auf eine unebene Linie IV. Ordnung einander conjugirt heissen, wenn sie in dem durch die Linie bestimmten Flächensysteme einander conjugirt sind. Ist in Hinsicht auf eine unebene Curve K IV. Ordnung einem in ihr liegenden Punkte P nur eine Gerade p conjugirt, so schmiegt diese im Punkte P der Curve sich an. Eine Fläche F des durch die Linie K bestimmten Flächensystems (F, F_1) geht (532) durch die Gerade p , während alle übrigen Flächen desselben die Gerade p im Punkte P berühren. Die dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Ebene U schneidet die Fläche F entweder in der Geraden p und in noch einer durch den Punkt P gehenden Geraden oder hat mit derselben nur die Gerade p gemein, je nachdem nämlich F eine Regelfläche oder eine Kegelfläche ist. Im erstern Falle ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem IV., im letztern aber ein Liniensystem V. Art. Der Curve K schmiegt die Ebene U im erstern Falle nur dreipunktig, im letztern aber vierpunktig sich an. Jede andere durch die Gerade p gehende Ebene hat mit der Fläche F auch eine nicht durch den Punkt P gehende Gerade q gemein und bestimmt daher mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem V. Art.

system II. oder III. Art, je nachdem nämlich die Gerade q mit der Curve K zwei Punkte oder nur einen Punkt gemein hat.

553. In jeder unebenen Curve K IV. Ordnung schneiden sich wenigstens zwei Kegelflächen II. Ordnung.

Da die Flächen des durch die Curve K bestimmten einfachen Flächensystems (F, F_1) sämtlich krumme Flächen sind, so ist nach 536 wenigstens eine Fläche F desselben eine Kegelfläche. Wenn nun der Mittelpunkt S dieser Fläche in der Curve K und also auch in der Ebene U liegt, welche ihm in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) zugeordnet ist, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem VI. Art, daher dem Systeme (F, F_1) zwei Kegelflächen angehören, welche die Ebene U berühren. Ist die eine von diesen Kegelflächen die Fläche F , so ist jede dritte Fläche des Systems (F, F_1) eine Regelfläche. Wenn aber die Ebene U die Kegelfläche F in zwei Geraden schneidet, so schneiden sich in der Curve K drei Kegelflächen II. Ordnung. Liegt der Punkt S ausserhalb der Curve K und also auch ausserhalb der Ebene U , so schneidet diese die Kegelfläche F und jede Regelfläche des Systems (F, F_1) in einer Curve II. Ordnung, jede von F verschiedene Kegelfläche aber, welche dem Systeme (F, F_1) angehört, in zwei Geraden, woraus hervorgeht, dass $U(F, F_1)$ ein einfaches Liniensystem I. oder II. oder IV. Art ist und dass im ersten dieser Fälle vier, im zweiten drei, im dritten aber zwei Flächen des Systems (F, F_1) Kegelflächen sind.

In einer unebenen Curve IV. Ordnung schneiden sich also entweder zwei oder drei oder vier Kegelflächen II. Ordnung. In den beiden erstern Fällen hat eine der Kegelflächen ihren Mittelpunkt in der Curve, während im letzten Falle die Mittelpunkte der vier Kegelflächen ausserhalb der Curve liegen und jedem derselben in dem durch die Curve bestimmten Flächensysteme die Ebene zugeordnet ist, welche durch die drei übrigen geht.

554. Durch zwei Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, welche einer und derselben Ebene E sich anschmiegen [und zwar die eine F in einer Geraden SS_1 , welche durch den Mittelpunkt S_1 der andern geht, die andere F_1 aber in einer Geraden S_1T , welche nicht durch den Mittelpunkt S der erstern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XX. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K

IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme der Flächen F , F_1 sämtlich Regelflächen sind.

Dem Punkte S_1 ist in dem Flächensysteme (F, F_1) die Ebene E zugeordnet, welche, da $E(F, F_1)$ ein Liniensystem VI. Art ist, jede Regelfläche des Systems (F, F_1) in zwei Geraden schneidet, die durch die Geraden $S_1 S$, $S_1 T$ harmonisch getrennt sind. Jede durch die Gerade $S_1 T$ gehende von E verschiedene Ebene bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem IV. Art und schneidet daher die Curve K nur in einem von S_1 verschiedenen Punkte, woraus man schliessen kann, dass die Curve im Punkte S_1 eine Spitze bildet und dass in diesem Punkte der Curve die Gerade $S_1 T$ und die Ebene E sich anschmiegen. Ist U eine durch den Punkt S_1 aber nicht durch die Gerade $S_1 T$ gehende Ebene, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt. — Die dem Punkte S zugeordnete und also durch die Gerade $S_1 T$ gehende Ebene H schneidet die Curve K in einem von S_1 verschiedenen Punkte A , in welchem derselben (552) die Gerade SA sich anschmiegt. Jeder ausserhalb der Ebene $SS_1 A$ liegende Strahl der Kegelfläche F hat mit der Kegelfläche F_1 und also auch mit der Curve K zwei Punkte gemein, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind. Schneidet eine Ebene U , welche nicht durch den Punkt S_1 geht, die Kegelfläche F in zwei Geraden, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder I. Art, je nachdem die Ebene U durch die Gerade SA oder nicht durch diese Gerade geht. Wenn aber eine Ebene U die Kegelfläche F in einer Geraden berührt, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem V. oder III. Art, je nachdem die Berührungslinie die Gerade SA oder eine andere Gerade ist. Im erstern Falle schmiegen die Ebene U und die Curve K im Punkte A vierpunktig einander sich an, während sie im letztern Falle in zwei Punkten sich berühren. — Ist U eine Ebene, welche durch keinen der Punkte S , S_1 geht, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder IV. Art. Im ersten dieser Fälle schneiden sich die Ebene U und die Curve K in vier Punkten, während sie im zweiten in einem Punkte sich berühren und in zwei Punkten sich schneiden, im dritten aber in einem Punkte einander sich anschmiegen und noch in einem andern Punkte sich schneiden.

555. Durch zwei nicht einer und derselben Ebene sich anschmiegende Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, von welchen die eine F durch den Mittelpunkt S_1 der andern, die andere F_1 aber nicht durch den Mittelpunkt S der erstern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XXI. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme der Flächen F, F_1 und noch einer dritten Kegelfläche F_2 sämtlich Regelflächen sind. Die der Kegelfläche F in der Geraden SS_1 sich anschmiegende Ebene E schneidet nämlich die Fläche F_1 in zwei andern Geraden p, q , daher $E(F, F_1)$ ein Liniensystem VI. Art ist, mithin eine Fläche F_2 des Flächensystem (F, F_1) die Ebene E in der Geraden S_1S_2 berührt, welche von der Geraden S_1S durch die Geraden p, q harmonisch getrennt ist.

Schneidet eine Ebene U die Ebene E in einer der Geraden p, q , so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem IV. und V. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt, woraus man schliessen kann, dass im Punkte S_1 der Curve K jede der Geraden p, q sich anschmiegt und also S_1 ein Knotenpunkt der Curve ist. Geht eine Ebene U durch den Punkt S_1 aber durch keine der Geraden p, q , so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt. — Die dem Punkte S in dem Systeme (F, F_1) zugeordnete und also durch die Gerade S_1S_2 gehende Ebene H schneidet die Curve K auch in zwei von S_1 verschiedenen Punkten A, B , in welchen derselben die Geraden SA, SB sich anschmiegen. Die Ebene SAB berührt die Kegelfläche F_2 in der Geraden AB und bestimmt daher mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem III. Art. Ist U eine andere nicht durch den Punkt S_1 gehende Ebene, welche die Fläche F in zwei Geraden schneidet, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. Art, je nachdem die Ebene U durch keine oder durch eine der Geraden SA, SB geht. Wenn aber eine Ebene U die Kegelfläche F in einer von SS_1 verschiedenen Geraden berührt, so bestimmt sie mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem III. oder V. Art, je nachdem die Berührungslinie ausserhalb der Ebene SAB liegt oder eine der Geraden SA, SB ist. Im erstern Falle berühren sich die Ebene U und die Curve K in zwei Punkten, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind, während

sie im letztern in einem der Punkte A, B vierpunktig einander sich anschmiegen. — Was von der Fläche F gilt, gilt auch von der Fläche F_2 . Namentlich schneidet auch die Ebene H_2 , welche in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Mittelpunkte S_2 der Fläche F_2 zugeordnet ist, die Curve K in zwei von S_1 verschiedenen Punkten A_2, B_2 , in deren jedem der Curve K eine Ebene, welche die Kegelfläche F_2 berührt, vierpunktig sich anschmiegt. — Geht eine Ebene U durch keinen der drei Punkte S, S_1, S_2 , so ist $U (F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder IV. Art, je nachdem die Ebene U drei oder zwei oder nur eine Regelfläche des Systems (F, F_1) in Geraden schneidet.

556. Durch zwei nicht einer und derselben Ebene sich anschmiegende Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, von welchen keine durch den Mittelpunkt der andern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XXII. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme von vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 sämtlich Regelflächen sind.

Die Ebene H , welche in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Mittelpunkte S der Kegelfläche F zugeordnet ist, schneidet die Kegelfläche F_1 in zwei Geraden, welche die Curve HF in vier Punkten A, B, C, D schneiden, daher $H (F, F_1)$ ein Liniensystem I. Art ist. Da nun die Ebene H in je zwei einander gegenüberliegenden Seiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ eine Kegelfläche schneidet, welche dem Flächensysteme (F, F_1) angehört, so folgt, dass durch die Curve K vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung gehen. Die Mittelpunkte dieser Kegelflächen liegen ausserhalb der Curve K und sind die Eckpunkte eines in dem Flächensysteme (F, F_1) enthaltenen Polartetraeders $SS_1 S_2 S_3$.

Schneidet eine Ebene die Fläche F in zwei Geraden, so ist $U (F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U durch keinen oder durch einen oder durch zwei Eckpunkte des Vierecks $ABCD$ geht. Ist aber U eine Ebene, welche die Fläche F in einer Geraden berührt, so ist $U (F, F_1)$ ein Liniensystem V. oder III. Art, je nachdem die Berührungslinie die Ebene H in einem der Punkte A, B, C, D oder in einem fünften Punkte schneidet. Im erstern dieser Fälle schmiegen die Ebene U und die Curve K in einem Eckpunkte des Vierecks $ABCD$ vierpunktig ein-

ander sich an, während sie im letztern Falle in zwei Punkten, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind, sich berühren. Was aber von der Fläche F gilt, gilt auch von den Flächen F_1, F_2, F_3 , daher es 16 Punkte giebt, in deren jedem der Curve K eine Ebene vierpunktig sich anschmiegt. Man kann diese Punkte, in welchen die Curve K von den Seiten des Tetraeders $SS_1S_2S_3$ geschnitten wird, die Wendepunkte derselben nennen.

Sind die Flächen eines einfachen Flächensystems sämtlich krumme Flächen, so schneiden sich dieselben entweder in einer Geraden und in einer unebenen Curve III. Ordnung oder in einer unebenen Curve IV. Ordnung. Im erstern Falle ist das Flächensystem ein System XVIII. oder XIX. Art, im letztern Falle aber (553) ein System XX. oder XXI. oder XXII. Art. Es folgt hieraus und aus 547, dass es ausser den betrachteten Arten von einfachen Flächensystemen keine andere giebt.

557. Durch ein Tetraeder $SS_1S_2S_3$, einen Punkt P , welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, und eine Gerade p ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, in welchem nämlich jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, dem Punkte P aber die Gerade p conjugirt ist.

Es seien U, U_1 irgend zwei in der Geraden p sich schneidende Ebenen, so giebt es (443) zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung, so dass in Hinsicht auf jede dieser Flächen und also auch in Hinsicht auf jede dritte Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) das Tetraeder $SS_1S_2S_3$ ein Polartetraeder ist und dass überdiess dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F die Ebene U , in Hinsicht auf die Fläche F_1 aber die Ebene U_1 zugeordnet, mithin in dem Systeme (F, F_1) die Gerade p conjugirt ist.

Je nachdem die Gerade p eine Kante des gegebenen Tetraeders ist, oder nur durch einen Eckpunkt desselben geht und nur in einer Seite desselben liegt, oder durch einen Eckpunkt geht, ohne in einer Seite zu liegen, oder in einer Seite liegt, ohne durch einen Eckpunkt zu gehen oder nur zwei Kanten oder nur eine oder gar keine Kante des Tetraeders schneidet, ist (F, F_1) ein Flächensystem VI. oder III. oder I. oder XVII. oder IX. oder XV. oder XXII. Art.

558. Wenn F, F_1 zwei Regelflächen sind, so kann man (536) zwei räumliche Systeme collinear so auf einander beziehen, dass,

was auch P , P_2 für zwei homologe Elemente derselben sein mögen, das dem Elemente P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Element in Hinsicht auf die Fläche E_1 dem Elemente P_2 zugeordnet ist. Haben die zu einander collineären Systeme irgend vier nicht in einerlei Ebene liegende Punkte entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite oder dritte oder vierte der in 509 betrachteten Fälle statt, je nachdem (F, F_1) ein Flächensystem XVII. oder IX. oder XV. oder XXII. Art ist. Haben die zu einander collineären Systeme irgend drei nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C aber keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite oder dritte oder vierte der in 510 betrachteten Fälle statt, je nachdem (F, F_1) ein Flächensystem XI. oder XII. oder XVI. oder XXI. Art ist. Haben die zu einander collineären Systeme keinen ausserhalb der Geraden p liegenden Punkt entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite der in 511 oder der erste oder zweite der in 512 betrachteten Fälle oder der in 513 betrachtete Fall statt, je nachdem (F, E_1) ein Flächensystem X. oder XVIII. oder XIII. oder XX. oder XIX. Art ist.

559. Wenn in einer reellen Curve K IV. Ordnung drei Kegelflächen F, F_1, F_2 II. Ordnung sich schneiden, so sind entweder alle drei reell oder es ist nur diejenige F_1 reell, deren Mittelpunkt S_1 in der Curve liegt, je nachdem nämlich die Mittelpunkte S, S_2 der beiden andern Kegelflächen zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte sind. Im letztern Falle schneidet die Ebene $SS_1 S_2$ jede durch die Curve K gehende reelle Fläche II. Ordnung und also auch die Kegelfläche F_1 in zwei reellen Geraden, weil in einem reellen Elementargebilde, wie aus der Betrachtung einer reellen Curve II. Ordnung hervorgeht, keine zwei einander conjungirte imaginäre Elemente durch zwei andere solche Elemente harmonisch getrennt sind.

Sind alle drei Kegelflächen reell, so hat man zu unterscheiden, ob die Kegelfläche F_1 die Ebene $SS_1 S_2$ in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden schneidet. Im erstern dieser Fälle schliesst die Kegelfläche F_1 den einen S von den beiden Punkten S, S_2 ein, daher jeder von SS_1 verschiedene reelle Strahl der Kegelfläche F mit der Curve K zwei reelle Punkte gemein hat.

Die Kegelfläche F_2 wird, da die in 555 durch A_2, B_2 bezeichneten Wendepunkte der Curve K reell sind, durch die Strahlen $S_2 A_2, S_2 B_2$ in zwei Theile getheilt, so dass jeder von $S_2 S_1$ verschiedene reelle Strahl des einen Theils durch zwei reelle, jeder reelle Strahl des andern Theils aber durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht. Wenn hingegen die Ebene $SS_1 S_2$ und die Kegelfläche F_1 in imaginären Geraden sich schneiden und daher auch die beiden übrigen Wendepunkte A, B der Curve K reell sind, so enthält jede von den beiden Kegelflächen F, F_2 drei reelle Strahlen, deren jeder mit der Curve K nur einen Punkt gemein hat. Ein vierter reeller Strahl der Fläche F hat mit der Curve K zwei reelle oder zwei einander conjugirte imaginäre Punkte gemein, je nachdem er vom Strahle SS_1 durch die Strahlen SA, SB getrennt oder nicht getrennt ist. Ebenso liegen in einem vierten reellen Strahle der Fläche F_2 zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte der Curve K , je nachdem derselbe vom Strahle $S_2 S_1$ durch die Strahlen $S_2 A_2, S_2 B_2$ getrennt oder nicht getrennt ist. Der Punkt S_1 ist in diesem Falle, da die in ihm der Curve K sich anschmiegenden Geraden imaginär sind, mit der stetigen Aufeinanderfolge, welche die übrigen reellen Punkte der Curve bilden, in keinem Zusammenhange und daher ein isolirter Punkt der Curve.

560. Jede unebene Curve K IV. Ordnung, in welcher vier reelle Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung sich schneiden, hat acht reelle Wendepunkte.

Es seien S, S_1, S_2, S_3 die Mittelpunkte der Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 , so schneidet jede dieser Flächen eine Seite des Tetraeders $SS_1 S_2 S_3$ in zwei einander conjugirten imaginären Geraden, jede der drei übrigen Seiten aber in einer reellen Linie II. Ordnung. Da nun jede Seite des Tetraeders, welche irgend eine der vier Kegelflächen in zwei imaginären Geraden und also die Curve K in vier imaginären Punkten schneidet, auch noch eine der drei übrigen Kegelflächen in imaginären Geraden schneidet, und da unter den 16 Linien II. Ordnung, in welchen die vier Kegelflächen von den vier Seiten des Tetraeders geschnitten werden, nur vier imaginäre sind, so folgt, dass diese in zwei Seiten $SS_1 S_2, SS_1 S_3$ des Tetraeders liegen und dass also jede der beiden übrigen Seiten die Curve K in vier reellen Punkten schneidet.

Die reellen Punkte der Curve K bilden zwei geschlossene Linien L , N , welche durch keinen Punkt mit einander zusammenhängen. Zwei Punkte A, B der Linie L liegen in der Ebene $S_1 S_2 S_3$, zwei andere A_1, B_1 in der Ebene $S S_2 S_3$. Eben so wird die Linie N von der Ebene $S_1 S_2 S_3$ in zwei Punkten C, D und von der Ebene $S S_2 S_3$ in zwei andern Punkten C_1, D_1 geschnitten. Die Kegelfläche F wird durch die vier Strahlen SA, SB, SC, SD in vier Theile $S(AB), S(BC), S(CD), S(DA)$ getheilt, so dass ein fünfter reeller Strahl der Fläche durch zwei Punkte der Linie L oder durch zwei Punkte der Linie N oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem ersten oder dem dritten oder einem der beiden übrigen Theile angehört. Eben so wird die Kegelfläche F_1 durch die vier Strahlen $S_1 A_1, S_1 B_1, S_1 C_1, S_1 D_1$ in vier Theile getheilt, so dass ein fünfter reeller Strahl der Fläche durch zwei Punkte der Linie L oder durch zwei Punkte der Linie N oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem Theile $S_1(A_1 B_1)$ oder dem Theile $S_1(C_1 D_1)$ oder einem der beiden übrigen Theile angehört. Jede reelle Gerade aber, welche in irgend einer von den beiden Kegelflächen F_2, F_3 liegt, geht durch einen Punkt der Linie L und durch einen Punkt der Linie N .

561. Wenn in einer reellen unebenen Curve K IV. Ordnung vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung sich schneiden, so sind diese entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär oder es sind zwei reell und zwei imaginär.

Wird nämlich die Curve K aus dem einen S_2 von zwei einander conjungirten imaginären Punkten durch eine Kegelfläche F_2 II. Ordnung projecirt, so wird sie auch aus dem andern S_3 durch eine Kegelfläche F_3 II. Ordnung projecirt. Die Gerade $S_2 S_3$ aber schneidet jede durch die Curve gehende reelle Fläche II. Ordnung in zwei reellen Punkten. Wenn nun auch die Kegelflächen F, F_1 imaginär sind und also zwei einander conjungirte imaginäre Punkte S, S_1 zu Mittelpunkten haben, so enthält jede durch die Curve K gehende reelle Fläche II. Ordnung, da sie zwei einander gegenüberliegende Kanten des Polartetraeders $S S_1 S_2 S_3$ in reellen Punkten schneidet, zwei reelle Regelschaaren. Wenn aber die Kegelflächen F, F_1 und also auch ihre Mittelpunkte S, S_1 reell sind, so gehen durch die Curve K auch unendlich viele reelle Flächen II. Ordnung, welche die

Gerade SS_1 in imaginären Punkten schneiden. Die Ebene H , welche durch die drei Punkte S_1, S_2, S_3 geht, schneidet in diesem Falle die Kegelfläche F_1 in zwei reellen Geraden, von welchen die eine mit der Curve HF und also auch mit der Curve K zwei reelle Punkte A, B gemein hat. Die Kegelfläche F wird durch die Geraden SA, SB in zwei Theile getheilt, so dass ein dritter reeller Strahl der Fläche durch zwei reelle oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem einen oder dem andern von den beiden Theilen angehört. Eben so wird die Kegelfläche F_1 durch die Gerade S_1A_1, S_1B_1 , welche der Curve K in ihren in der Ebene SS_2S_3 liegenden reellen Wendepunkten A_1, B_1 sich anschmiegen, in zwei Theile getheilt, so dass ein dritter reeller Strahl der Fläche mit der Curve K zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte gemein hat, je nachdem er in dem einen oder in dem andern von den beiden Theilen liegt.

§. 38.

Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben.

562. Gerade Gebilde $PP_1P_2P_3\dots, QQ_1Q_2Q_3\dots$, welche (532) zu einem und demselben einfachen Flächensysteme $FF_1F_2F_3\dots$ perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch.

Liegen die Geraden PP_1, QQ_1 in einerlei Ebene, so folgt der Satz aus 355. Wenn aber die Geraden PP_1, QQ_1 nicht in einerlei Ebene liegen, so seien M, N diejenigen Punkte derselben, welche alle Flächen des Flächensystems mit einander gemein haben. Es sei ferner R ein ausserhalb der Geraden MN liegender Punkt, so dass auch die Geraden MR, NR Träger von zwei zu dem Flächensysteme perspektivischen geraden Gebilden sind. Da nun je zwei auf einander folgende der vier Geraden PP_1, MR, NR, QQ_1 in einerlei Ebene liegen, so ist der Satz auf den zuerst betrachteten Fall zurückgeführt.

Von der Fläche F_3 soll gesagt werden, dass sie im Sinne $F F_1 F_2$ oder im Sinne $E_2 F_1 F$ liege oder zum Sinne $F F_1 F_2$ neutral sich verhalte, je nachdem der Punkt P_3 in Sinne

PP_1P_2 oder im Sinne P_2P_1P liegt oder zum Sinne PP_1P_2 neutral sich verhält. Es geht hieraus von selbst hervor, was es heisst, wenn gesagt wird, dass ein einfaches Flächensystem zu einem Elementargebilde oder zu einem einfachen Liniensysteme oder zu einem andern einfachen Flächensysteme projektivisch sei. Der Wurf $FF_1F_2F_3$ ist dem Wurfe $ff_1f_2f_3$ gleich, wenn dieser dem Wurfe $PP_1P_2P_3$ gleich ist. — Flächensysteme VI. Art sind in diesem §. von der Betrachtung ausgeschlossen.

563. Wenn in einem einfachen Flächensysteme dem Punkte A nur die Gerade a conjugirt ist und man auf jede Fläche des Systems die in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte A zugeordnete Ebene bezieht, so sind das Flächensystem und der Ebenenbüschel a projektivisch auf einander bezogen.

Es folgt dieser Satz aus 357, wenn man durch den Punkt A eine Ebene E legt, welche die Gerade a schneidet. Sind dem Punkt A in Hinsicht auf die Flächen F, F_1, F_2, F_3 des gegebenen Flächensystems bezüglich die Ebenen U, U_1, U_2, U_3 zugeordnet, so ist $FF_1F_2F_3 \propto E (FF_1F_2F_3) \propto E (UU_1U_2U_3) \propto UU_1U_2U_3$.

564. Ist in einem einfachen Flächensysteme (F, F_1) dem Punkte A nur die Gerade a, dem Punkte B eine andere Gerade b und zwar nur diese Gerade conjugirt, so giebt es ein aus Geraden bestehendes Gebilde $abcd\dots$, welches zu dem geraden Gebilde $ABCD\dots$ projektivisch und demselben in dem Flächensysteme (F, F_1) conjugirt ist. Hiemit hängt ein anderes aus Geraden bestehendes Gebilde $ff_1f_2f_3\dots$ zusammen, welches nämlich zu dem gegebenen Flächensysteme $FF_1F_2F_3\dots$ projektivisch ist und von jedem dem geraden Gebilde $ABCD\dots$ in Hinsicht auf eine Fläche F_n des Systems zugeordneten Ebenenbüschel $f_n (abcd\dots)$ die Axe f_n als die dieser Fläche entsprechende Gerade enthält. Werden die Ebenenbüschel a, b auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf das Flächensystem $FF_1F_2F_3\dots$ projektivisch bezogen, so erzeugen sie das Gebilde $ff_1f_2f_3\dots$, während je zwei Ebenenbüschel f, f_1 , deren jeder dem geraden Gebilde $ABCD\dots$ in Hinsicht auf eine Fläche des Systems zugeordnet ist, das Gebilde $abcd\dots$ erzeugen. Es sind hiernach $abcd\dots, ff_1f_2f_3\dots$ entweder zwei Regelschaaren, deren jede die Leitschaar der andern ist, oder zwei Strahlenbüschel, welche einenlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, oder

es liegen die Gebilde $abcd\dots$, $ff_1f_2f_3\dots$ in einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung. Der zweite Fall findet nur statt, wenn es in der Geraden AB einen Punkt S giebt, welchem in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) eine und dieselbe Ebene ff_1 zugeordnet ist. In diesem Falle entspricht dem Punkte S des geraden Gebildes $ABC\dots$ der in der Ebene ff_1 liegende Strahl des Büschels $abc\dots$ und der in dem Strahlenbündel S enthaltenen Fläche des Flächensystems $FF_1F_2\dots$ der in der Ebene ab liegende Strahl des Büschels $ff_1f_2\dots$. In Hinsicht auf die erwähnte Fläche ist dem Punkte S jede Ebene, jedem andern Punkt der Geraden AB aber die Ebene ab zugeordnet, daher diese durch den Punkt S geht. Wenn einer von den beiden letztern Fällen statt findet und dem Punkte ab in dem Systeme (F, F_1) nur die Gerade AB conjugirt ist, so enthält die Fläche II. Ordnung, in welcher die beiden Gebilde $abc\dots$, $ff_1f_2\dots$ liegen, jede Gerade, welche durch den Punkt ab geht und in dem Systeme (F, F_1) einem Punkte conjugirt ist.

565. Durch ein einfaches Flächensystem $FF_1F_2F_3\dots$, dessen Flächen sämtlich krumme Flächen sind, und eine Ebene U , welche von keiner Kegelfläche des Systems den Mittelpunkt enthält, ist ein zu demselben projektivisches in einer unebenen Curve K III. Ordnung liegendes Punktgebilde $PP_1P_2P_3\dots$ bestimmt, welchem nämlich jeder der Ebene U in Hinsicht auf eine Fläche des Systems zugeordnete Punkt als der dieser Fläche entsprechende Punkt angehört. Bezieht man (563) jeden Ebenenbüschel, dessen Axe a einem Punkte A der Ebene U conjugirt ist, auf das Flächensystem projektivisch, so dass jeder Fläche des Systems die in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte A zugeordnete Ebene entspricht, so erzeugen je drei solche zu dem Flächensysteme und daher auch zu einander projektivische Ebenenbüschel, deren Axen drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden Punkten der Ebene U conjugirt sind, die erwähnte Curve K .

Die Ebene U enthält eine zur Curve K projektivische Curve L II. Ordnung, so dass, wenn P, Q homologe Punkte dieser Curven sind, in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Punkte P die der Curve L im Punkte Q sich anschmiegende Gerade und dem Punkte Q die der Curve K im Punkte P sich anschmiegende Gerade, mithin jeder von den beiden Curven der der andern sich anschmiegende Strahlenbüschel conjugirt ist. Jedem geraden Gebilde, dessen Träger der Curve L

sich anschmiegt, ist eine zur Curve K perspektivische Kegelfläche, jedem geraden Gebilde aber, welches mit der Curve L zwei Punkte gemein hat, eine Regelschaar conjugirt, welche von einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar die Leitschaar ist. Der Curve L ist in Hinsicht auf jede Fläche des Systems (F, E_1) ein Ebenenbüschel II. Ordnung zugeordnet, welcher nämlich aus dem der Fläche entsprechenden Punkte der Curve K den dieser Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel projecirt. Der Curve K ist in Hinsicht auf jede Regelfläche des Flächensystems ein Ebenenbüschel III. Ordnung zugeordnet, welcher von der Ebene U in dem der Curve L sich anschmiegenden Strahlenbüschel geschnitten wird.

Die Mittelpunkte von allen Flächen eines einfachen Flächensystems, welches weder eine Cylinderfläche noch eine Fläche enthält, die der Inbegriff von zwei Ebenen oder selbst eine Ebene ist, liegen nach dem obigen Satze in einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung.

566. Wenn in einem einfachen Flächensysteme dem Punkte S der Ebene U die Ebene H zugeordnet aber keinem von S verschiedenen Punkte der Ebene U eine in der Ebene H liegende Gerade conjugirt ist, so giebt es in dieser Ebene eine Curve K II. Ordnung, welche auf das Flächensystem projektivisch so bezogen werden kann, dass jedem Punkte derselben in Hinsicht auf die ihm entsprechende Fläche des Systems die Ebene U zugeordnet ist. Ist $ABC \dots$ ein gerades Gebilde, welches in der Ebene U liegt aber nicht durch den Punkt S geht, so liegen die in 564 durch $abc \dots$, $ff_1f_1 \dots$ bezeichneten Gebilde in einer krummen Fläche II. Ordnung welche die Ebene H in der Curve K schneidet.

Ist in einem einfachen Flächensysteme keinem Punkte die Ebene U aber einem in dieser Ebene liegenden Punkte S die Ebene H zugeordnet und einem andern Punkte A der Ebene U eine in der Ebene H liegende Gerade a conjugirt, so kann man das Flächensystem auf das gerade Gebilde a projektivisch so beziehen, dass jedem Punkte dieses Gebildes in Hinsicht auf die ihm entsprechende Fläche des Systems die Ebene U zugeordnet ist.

§. 39.

Bestimmung von Flächen II. Ordnung durch gegebene Punkte.

567. Durch sieben Punkte A, B, C, D, M, N, P sind unendlich viele Flächen II. Ordnung möglich, welche nicht alle einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören.

Da nämlich durch zwei Gerade und drei Punkte wenigstens eine Fläche II. Ordnung möglich ist, so giebt es mehr als eine und daher unendlich viele Flächen II. Ordnung, welche durch die Gerade AB und durch die fünf Punkte C, D, M, N, P gehen. Gehören alle diese Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so sei u eine Gerade, welche nur in einer Fläche F des Systems liegt und durch zwei der sieben gegebenen Punkte geht. Legt man nun durch die Gerade u und durch die fünf übrigen Punkte eine von F verschiedene Fläche II. Ordnung, so gehört diese jenem Flächensysteme nicht an.

Liegt irgend einer von acht gegebenen Punkten in jeder Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben übrigen geht, so lassen sich durch die acht Punkte unendlich viele Flächen II. Ordnung legen, welche nicht alle einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören.

568. Wenn R, S zwei Punkte, F, F_1, F_2 aber drei Flächen II. Ordnung sind, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so giebt es wenigstens eine Fläche F_3 II. Ordnung, welche durch die beiden gegebenen Punkte und durch jeden gemeinschaftlichen Punkt der drei gegebenen Flächen geht, so dass überdiess je zwei in Hinsicht auf diese drei Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die Fläche F_3 einander conjugirt sind.

Durch den Punkt R kann man nämlich zwei Flächen G, G_1 II. Ordnung legen, von welchen die eine dem Systeme (F, F_1) , die andere aber dem Systeme (F, F_2) oder (F_1, F_2) angehört. Bemerkt man nun, dass wenigstens eine Fläche F_3 des Systems (G, G_1) durch den Punkt S geht, so folgt der Satz.

Aus dem obigen und dem vorhergehenden Satze kann man schliessen, dass durch neun gegebene Punkte wenigstens eine Fläche

II. Ordnung möglich ist, daher durch acht gegebene Punkte unendlich viele Flächen II. Ordnung gelegt werden können.

569. Ist von der Bestimmung einer Fläche II. Ordnung durch gegebene Punkte die Rede, so heissen Punkte, deren Anzahl n nicht grösser als neun ist, von einander unabhängig, wenn keiner derselben in jeder Fläche II. Ordnung liegt, welche durch die $n-1$ übrigen geht. Sind also n Punkte von einander unabhängig, so sind auch je $n-1$ derselben von einander unabhängig.

Wenn durch neun gegebene Punkte nur eine Fläche II. Ordnung möglich ist, so kann man durch je acht derselben unendlich viele Flächen II. Ordnung legen, welche nicht durch den neunten gehen, daher die neun Punkte von einander unabhängig sind. — Gehören alle Flächen II. Ordnung, welche durch dieselben acht gegebenen Punkte gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme (F, F_1) an, so sind (567) die acht Punkte von einander unabhängig. Der letztere Satz folgt auch aus dem erstern, wenn man bemerkt, dass die acht Punkte mit jedem Punkte, der nur in einer Fläche des Systems (F, F_1) liegt, neun von einander unabhängige Punkte bilden.

570. Sieben Punkte sind, wie man sich leicht überzeugt, von einander unabhängig, wenn keine vier in einer und derselben Geraden, keine sechs in einer und derselben Linie II. Ordnung und auch nicht alle sieben in einerlei Ebene liegen.

In jeder Fläche F II. Ordnung, welche durch sieben gegebene von einander unabhängige Punkte A, B, C, D, M, N, P geht, kann man noch zwei Punkte R, S annehmen, so dass von den neun Punkten, welche man alsdann hat, keine vier in einer und derselben Geraden, aber fünf in einer und derselben Linie K II. Ordnung liegen, während die vier übrigen die Eckpunkte eines Tetraeders sind, so dass überdiess keiner dieser Punkte in der Linie K und höchstens einer derselben mit der Linie K in einerlei Ebene liegt, folglich durch die neun Punkte keine von F verschiedene Fläche II. Ordnung möglich ist.

571. Wenn vier Flächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung durch dieselben sieben von einander unabhängigen Punkte A, B, C, D, M, N, P gehen und die drei erstern Flächen nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so liegt jeder Punkt, welchen diese mit einander gemein haben, auch in der vierten Fläche. Eben so sind

je zwei in Hinsicht auf die drei erstern Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die vierte einander conjugirt.

Man nehme (570) in der Fläche F_3 zwei Punkte R, S an, welche mit den sieben gegebenen Punkten in keiner andern Fläche II. Ordnung liegen, so folgt der Satz aus 568. — Gehen drei Flächen II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, durch dieselben acht Punkte, so liegt entweder der achte Punkt in jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben erstern geht, oder es sind schon die sieben erstern Punkte nicht unabhängig von einander.

572. Durch acht von einander unabhängige Punkte ist (571) ein einfaches Flächensystem bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die acht gegebenen Punkte geht. Die Flächen des erwähnten Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegenden Gerade oder eine unebene Linie IV. Ordnung, welche durch die acht gegebenen Punkte bestimmt ist, mit einander gemein. Der erstere Fall findet statt, wenn sechs von den acht Punkten in einerlei Ebene liegen, so wie auch, wenn nur fünf von den acht Punkten in einerlei Ebene und die drei übrigen in einer und derselben Geraden liegen.

573. Durch neun von einander unabhängige Punkte ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die neun gegebenen Punkte geht. Denn je acht von den neun Punkten bestimmen ein einfaches Flächensystem, von welchem nur eine Fläche durch den neunten Punkt geht. — Eine Gerade vertritt die Stelle von drei Punkten. Zwei Gerade vertreten die Stelle von fünf oder sechs von einander unabhängigen Punkten je nachdem sie in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen.

Gleichwie acht von einander unabhängige Punkte mit jedem Punkte, der nur in einer durch sie gehenden Fläche II. Ordnung liegt, neun von einander unabhängige Punkte bilden, so bilden auch, wie indirekt aus 567 und 571 folgt, sieben von einander unabhängige Punkte mit jedem Punkte, der nicht in jeder durch sie gehenden Fläche II. Ordnung liegt, acht von einander unabhängige Punkte.

574. Liegen sieben von einander unabhängige Punkte in einer und derselben Linie K III. Ordnung, so geht jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben Punkte geht, auch durch die Linie K , sei

es nun, dass diese (476) eine Curve III. Ordnung ist, oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung oder aus drei Geraden besteht.

Sind zwei Punkte in Hinsicht auf drei Flächen II. Ordnung einander conjugirt, welche durch eine und dieselbe unebene Linie K III. Ordnung gehen aber nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so sind sie (571) in Hinsicht auf jede durch die Linie K gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt, daher man auch sagen kann, dass die beiden Punkte in Hinsicht auf die Linie K einander conjugirt sind.

Durch eine unebene Linie K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, dem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die gegebene Linie und durch den gegebenen Punkt geht. Die Flächen des erwähnten Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade oder eine Linie IV. Ordnung mit einander gemein, welche aus der Linie K und einer durch den Punkt P gehenden Geraden besteht. Im letztern Falle giebt es nur einen Punkt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf die Linie K conjugirt ist.

575. Durch eine Gerade u und fünf ausserhalb derselben liegende Punkte A, B, C, D, E, welche mit je drei Punkten der gegebenen Geraden acht von einander unabhängige Punkte bilden, ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Gerade und durch die gegebenen Punkte geht. Die Flächen dieses Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade oder eine Linie IV. Ordnung mit einander gemein, welche aus der Geraden u und einer durch die fünf gegebenen Punkte gehenden Linie III. Ordnung zusammengesetzt ist.

Wenn es nur eine Fläche E II. Ordnung giebt, welche durch die Gerade u und durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, P geht und diese Fläche eine krumme Fläche ist, so liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E in einer unebenen Linie K III. Ordnung, welche sowohl mit der Geraden u als auch mit einer durch den Punkt P gehenden Geraden v eine Linie IV. Ordnung bildet. Je nachdem nun die Geraden u, v sich schneiden oder nicht in einerlei Ebene liegen,

ist die Fläche F , welche durch die drei Linien u , K , v geht, eine Kegelfläche oder Regelfläche.

576. Wenn zwei Punkte R , S in Hinsicht auf eine unebene Linie K III. Ordnung und in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche die Linie K in sechs Punkten A , B , C , D , M , N schneidet, einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jede andere durch diese sechs Punkte gehende Fläche F_1 II. Ordnung einander conjugirt.

Wenn nämlich die Fläche F_1 nicht durch die Linie K geht, so sei P ein siebenter Punkt dieser Linie und E_2 diejenige Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) , welche durch den Punkt P und also auch (574) durch die Linie K geht. Da nun die drei Flächen F , F_1 , F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und die Punkte R , S sowohl in Hinsicht auf die erste als auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die zweite einander conjugirt.

577. Durch sechs Punkte A , B , C , D , M , N , von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, und eine Gerade u , welche durch keinen der gegebenen Punkte geht aber mit der durch diese Punkte gehenden Linie K III. Ordnung eine Linie IV. Ordnung bildet, sind zwei Punkte R , S bestimmt, welche nämlich in der gegebenen Geraden liegen und in Hinsicht auf jede durch die sechs gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt sind.

Es sei F irgend eine Fläche II. Ordnung, welche die Linie K in den sechs gegebenen Punkten schneidet, so sind die Ordnungspunkte R , S des involutorischen Gebildes uK . uF ... sowohl in Hinsicht auf die Linie K als auch in Hinsicht auf die Fläche F und mithin (576) in Hinsicht auf jede durch die sechs gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt. In Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sechs gegebenen Punkte und durch den Punkt R geht, ist diesem Punkte die Gerade u conjugirt.

578. Wenn in Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben Punkte A , B , C , D , M , N , R geht, dem Punkte R die Gerade u conjugirt ist, so giebt es wenigstens eine Fläche II. Ordnung, welche durch die Geraden RA , RB , RC , RD , RM , RN geht.

Liegen nämlich irgend zwei RA , RB dieser Geraden mit der Geraden u nicht in einerlei Ebene, so sei F diejenige oder eine Flä-

che II. Ordnung, welche durch die beiden Geraden RA , RB und durch die vier Punkte C , D , M , N geht. Da nun in Hinsicht auf die Fläche F dem Punkte R jede der drei Geraden RA , RB , u conjugirt ist, diese aber nicht in einerlei Ebene liegen, so ist die Fläche F in dem Strahlenbündel R enthalten.

579. Wenn aus dem einen R von sieben Punkten A , B , C , D , M , N , R , deren keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, die sechs übrigen durch Gerade projectirt werden, welche einer und derselben Fläche F II. Ordnung angehören, so giebt es eine aber auch nur eine Gerade u , welche jenem Punkte R in Hinsicht auf jede durch die sieben gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung conjugirt ist.

Liegen die sieben gegebenen Punkte in einer und derselben Curve III. Ordnung, so ist u die dieser Curve im Punkte R sich anschmiegende Gerade. Wenn aber der Punkt R ausserhalb der durch die sechs Punkte A , B , C , D , M , N gehende Linie K III. Ordnung liegt, so haben alle Flächen II. Ordnung, welche durch die Linie K und durch den Punkt R gehen, auch noch eine durch diesen Punkt gehende Gerade u mit einander gemein. Da nun der Punkt R und die Gerade u auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt sind, welche nicht durch die Linie K geht, so sind sie (571) in Hinsicht auf jede durch die sieben gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt. Bemerkt wird noch, dass die Gerade u einen Punkt S enthält, welcher dem Punkte R in Hinsicht auf jede durch die sechs Punkte A , B , C , D , M , N gehende Fläche II. Ordnung conjugirt ist.

580. Wenn drei Flächen F , F_1 , F_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, acht Punkte A , B , C , D , M , N , P , Q , deren keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, mit einander gemein haben, so haben sie entweder eine Curve III. Ordnung oder nur jene acht Punkte mit einander gemein. Aber auch im letztern Falle bildet jede Gerade, welche durch zwei von den acht Punkten geht, mit der durch die sechs übrigen Punkte gehenden Linie III. Ordnung eine Linie IV. Ordnung.

Es seien G , G_1 zwei Flächen II. Ordnung, deren jede durch die Gerade PQ und die fünf Punkte A , B , C , D , M , mithin auch (571) durch den Punkt N geht, so schneiden sich dieselben in einer

Linie IV. Ordnung, welche aus der Geraden PQ und der durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehenden Linie III. Ordnung zusammengesetzt ist. Da nun wenigstens eine der drei Flächen F, F_1, F_2 dem einfachen Flächensysteme (G, G_1) nicht angehört und also nicht durch die Gerade PQ geht, jeder Punkt aber, welchen die drei Flächen E, F_1, F_2 mit einander gemein haben, auch ein gemeinschaftlicher Punkt der Flächen G, G_1 ist, so folgt der Satz.

Haben also eine Linie IV. Ordnung und eine nicht durch diese Linie gehende Fläche II. Ordnung acht Punkte mit einander gemein, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, so haben sie entweder eine Curve III. Ordnung oder nur jene acht Punkte mit einander gemein. In beiden Fällen geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten.

581. Durch sieben Punkte A, B, C, D, M, N, P , deren keine sechs aus dem siebenten durch Gerade projecirt werden, welche einer und derselben Fläche II. Ordnung angehören, ist ein achter Punkt Q bestimmt, der nämlich in jeder Fläche II. Ordnung liegt, welche durch die sieben gegebenen Punkte geht.

Denn in der Geraden, welche durch den Punkt P geht und mit der durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehenden Linie III. Ordnung eine Linie IV. Ordnung bildet, giebt es zwei Punkte R, S , welche in Hinsicht auf jede durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt sind, daher jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben gegebenen Punkte geht, auch durch den Punkt Q geht, welcher vom Punkte P durch die Punkte R, S harmonisch getrennt ist. Da es hiernach unendlich viele Flächen II. Ordnung giebt, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und die acht Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q , von welchen keine drei in einer und derselben Geraden, keine fünf in einerlei Ebene und keine sieben in einer und derselben Linie III. Ordnung liegen, mit einander gemein haben, so folgt noch, dass jede Fläche II. Ordnung und also auch jede Linie IV. Ordnung, welche durch irgend sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten geht, aber keine zwei solche Linien einen neunten Punkt mit einander gemein haben.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einerlei Ebene, so lie-

gen auch die vier Punkte M, N, P, Q in einerlei Ebene. Die in der Schnittlinie der beiden Ebenen liegenden und in Hinsicht auf das Viereck $ABCD$ einander conjugirten Punkte sind alsdann in Hinsicht auf jede durch alle acht Punkte gehende Fläche II. Ordnung und also auch in Hinsicht auf das Viereck $MNPQ$ einander conjugirt.

582. Wenn $ABCD, MNPQ$ Polartetraeder eines und desselben Polarsystems sind, so geht jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des einen und drei Eckpunkte des andern Tetraeders geht, auch durch den vierten Eckpunkt des andern.

Haben die Tetraeder eine Kante mit einander gemein, so haben sie auch die derselben gegenüberliegende Kante mit einander gemein. — Haben die Tetraeder keine Kante aber einen Eckpunkt mit einander gemein, so dass etwa M mit A zusammenfällt, so sind BCD, NPQ Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems, daher (G. 300) jede Fläche II. Ordnung, welche durch die drei Eckpunkte des einen dieser Dreiecke und zwei Eckpunkte des andern geht, auch durch den dritten Eckpunkt des andern geht. Wenn die Tetraeder weder eine Kante noch einen Eckpunkt und also auch keine Seite mit einander gemein haben, aber der Punkt Q in der Geraden AB liegt, so geht die Ebene MNP durch die Gerade CD und schneidet die Gerade AB in einem Punkte H , so dass HCD, MNP Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems sind, woraus leicht folgt, dass der Satz auch in diesem Falle gilt. — Wenn endlich die Polartetraeder weder einen Eckpunkt mit einander gemein haben noch drei von den acht Eckpunkten in einer und derselben Geraden und also auch keine fünf in einerlei Ebene liegen, so giebt es doch eine Fläche F II. Ordnung, die durch die vier Punkte A, B, M, N und durch die beiden Geraden u, v geht, von welchen die eine u den Punkt C mit dem Punkte D , die andere v aber den Punkt P mit dem Punkte Q verbindet. Liegen nämlich zwei von den vier Punkten A, B, M, N mit der u in einerlei Ebene, so liegen die beiden übrigen mit der Geraden v in einerlei Ebene. Wenn aber die Gerade MN die Ebenen uA, uB in zwei verschiedenen Punkten B_1, A_1 schneidet und keiner dieser Punkte mit einem der Punkte M, N zusammenfällt, so bemerke man, dass in dem Polarsysteme dem Wurfe A_1B_1NM der Wurf $v(ABMN)$ zugeordnet ist. Da hierrach $v(ABMN) \propto A_1B_1NM \propto B_1A_1MN \propto u(ABMN)$ ist, so liegen

auch in diesem Falle die vier Punkte A, B, M, N mit den beiden Geraden u, v in einer und derselben Fläche F II. Ordnung. Ebenso kann man durch die Eckpunkte der Tetraeder $ABCD, MNPQ$ auch zwei Flächen II. Ordnung legen, von welchen die eine F_1 durch die Gerade u und eine ausserhalb der Fläche F liegende Kante w des Tetraeders $MNPQ$, die andere F_2 aber durch die Gerade w und eine ausserhalb der Fläche F_1 liegende Kante des Tetraeders $ABCD$ geht. Da nun die Flächen F_1, F_2 die Gerade w mit einander gemein haben, welche die Fläche F in zwei Punkten schneidet, mithin die Flächen F, F_1, F_2 nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des einen Tetraeders und drei Eckpunkte des andern geht, auch durch den vierten Eckpunkt des andern.

583. Wenn $MNPQ, ABCD$ Polartetraeder eines und desselben Polarsystems sind, so schneidet jede Gerade PQ , welche von irgend einem der beiden Tetraeder zwei Eckpunkte verbindet, die Ordnungsfläche des Polarsystems in zwei Punkten R, S , welche in Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, die durch die beiden übrigen Eckpunkte jenes Tetraeders und durch die vier Eckpunkte des andern Tetraeders geht, einander conjugirt sind.

Es seien F, F_1 zwei Flächen II. Ordnung, welche durch die Punkte M, N, A, B, C, D gehen und von welchen die eine F auch noch durch den Punkt R , die andere F_1 aber durch keinen von den beiden Punkten R, S gehe. Haben nun die Fläche F_1 und die Gerade RS den Punkt P_1 mit einander gemein, so schneiden sie sich auch (582) in dem Punkte Q_1 , welcher vom erstern durch die Punkte R, S harmonisch getrennt und daher in dem Polarsysteme der Ebene MNP_1 zugeordnet ist, woraus hervorgeht, dass die Punkte R, S in Hinsicht auf die Fläche F_1 einander conjugirt sind. Geht die Fläche F durch die Gerade RS , so sind schon deshalb die Punkte R, S in Hinsicht auf dieselbe einander conjugirt. Wenn aber die Fläche F nicht durch die Gerade RS geht und P_2 irgend ein von S verschiedener und ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegender Punkt der Geraden RS ist, so schneidet diese die durch den Punkt P_2 gehende Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) im Punkte P_2 und in dem Punkte Q_2 , welcher vom erstern durch die Punkte R, S harmonisch getrennt ist. Da hiernach die Punkte R, S sowohl in Hin-

sicht auf die Fläche F_1 als auch in Hinsicht auf die Fläche F_2 einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt.

Eben so sind, wenn in Hinsicht auf eine Curve II. Ordnung, welche durch die Punkte R, S geht, jedem Eckpunkte des Dreiecks ABC die ihm gegenüberliegende Seite desselben und der Geraden RS der Punkt M zugeordnet ist, die Punkte R, S in Hinsicht auf jede durch die vier Punkte A, B, C, M gehende Linie II. Ordnung einander conjugirt.

584. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet ist und auch der Punkt M ausserhalb der ihm zugeordneten Ebene U liegt, so schneidet diese je zwei durch den Punkt M gehende und in dem Polarsysteme einander conjugirte Ebenen in zwei Geraden g, h , welche mit den fünf Punkten A, B, C, D, M in einer und derselben Fläche II. Ordnung liegen.

Die Ebene U schneidet die Ordnungsfläche des Polarsystems in einer Curve K II. Ordnung, welche wenigstens mit der einen g von den beiden Geraden g, h zwei Punkte R, S gemein hat. Wenn nun P, Q irgend zwei durch die Punkte R, S harmonisch getrennte Punkte sind und N denjenigen in der Geraden h liegenden Punkt bezeichnet, welcher in Hinsicht auf die Curve K der Geraden g zugeordnet ist, so ist auch $MNPQ$ ein Polartetraeder des im Satze angenommenen Polarsystems, daher (582) die durch die beiden Geraden g, h und durch die vier Punkte A, B, C, D gehende Fläche II. Ordnung auch durch den Punkt M geht.

585. Wenn von den fünf Punkten A, B, C, D, M keine vier in einerlei Ebene liegen und eine durch sie gehende Fläche F II. Ordnung eine Ebene U , welche durch keinen derselben geht, in zwei Geraden g, h schneidet, so sind in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene U zugeordnet ist, die Ebenen Mg, Mh einander conjugirt.

Es seien H_1, H_2 irgend zwei Ebenen, welche durch den Punkt M gehen und in dem erwähnten Polarsysteme der Ebene Mg conjugirt sind, so giebt es (584) zwei durch die Gerade g und durch die fünf Punkte A, B, C, D, M gehende Flächen II. Ordnung, von wel-

chen überdiess die eine F_1 durch die Gerade UH_1 , die andere F_2 aber durch die Gerade UH_2 geht. Da nun (575) die Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme und also die Linien UF, UF_1, UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so geht die Gerade h und mithin auch die Ebene Mh durch den Punkt UH_1H_2 , welcher in dem Polarsysteme der Ebene Mg zugeordnet ist.

586. Wenn jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ und irgend drei Eckpunkte des Tetraeders $MNPQ$ geht, auch durch den vierten Eckpunkt dieses Tetraeders geht, so sind die beiden Tetraeder Polartetraeder eines und desselben Polarsystems.

Haben die Tetraeder eine Kante mit einander gemein, so haben sie nach der Annahme auch die derselben gegenüberliegende Kante mit einander gemein. Haben die Tetraeder keine Kante aber einen Eckpunkt mit einander gemein, so dass etwa der Punkt M mit dem Punkte A zusammenfällt, so sind die Dreiecke BCD, NPR , da ihre sechs Eckpunkte in einer und derselben Linie II. Ordnung liegen, Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems. Sowohl in diesem als auch im erstern Falle giebt es, wie man sich leicht überzeugt, unendlich viele Polarsysteme, von welchen die gegebenen Tetraeder Polartetraeder sind. Es sind hiernach nur noch die Fälle zu betrachten, in welchen die Tetraeder weder eine Kante noch einen Eckpunkt mit einander gemein haben.

Liegt der Punkt M ausserhalb der vier Ebenen ABC, ABD, ACD, BCD , so geht, wie aus der Annahme sich ergibt, die Ebene NPQ durch keinen der vier Punkte A, B, C, D . Da nun jede Fläche II. Ordnung, welche durch zwei Seiten des Dreiecks NPQ und durch die vier Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ geht, auch durch den Punkt M geht, so sind (585) in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene NPQ zugeordnet ist, die drei Ebenen MNP, MNQ, MPQ einander conjugirt, daher auch $MNPQ$ ein Polartetraeder des erwähnten Systems ist. Eben so folgt der Satz aus 585, wenn irgend ein Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ ausserhalb der vier Seiten des Tetraeders $MNPQ$ liegt. Die Fälle, in welchen eine Kante des einen Tetraeders durch einen Eckpunkt

des andern geht, sind unter den bereits betrachteten begriffen. Liegen nämlich die drei Punkte M, N, A in einer und derselben Geraden, so liegen die fünf Punkte B, C, D, P, Q mit einem Punkte der Geraden MN in einer und derselben Linie II. Ordnung und wenigstens zwei von den drei Punkten B, C, D ausserhalb der vier Ebenen MNP, MNQ, MPQ, NPQ . Wenn endlich jeder Eckpunkt eines jeden von den beiden Tetraedern $ABCD, MNPQ$ in einer Seite des andern und zwar der Punkt M in der Ebene ABC , mithin der Punkt D in der Ebene NPQ liegt, so sei K die Curve II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Dreiecks ABC die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Schnittlinie u der Ebenen ABC, NPQ zugeordnet ist. Es sei ferner K_1 die Curve II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Dreiecks NPQ die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte D die Gerade u zugeordnet ist. Da nun die Curven K, K_1 diejenigen Punkte der Geraden u , welche (581) in Hinsicht auf die beiden Vierecke $ABCM, DNPQ$ einander conjugirt sind, mit einander gemein haben, so giebt es ein Polarsystem, dessen Ordnungsfläche durch die beiden Curven K, K_1 geht und in welchem überdiess (450) die Ebenen ABC, NPQ einander conjugirt, folglich je zwei einander gegenüberliegende Elemente sowohl des Tetraeders $ABCD$ als auch des Tetraeders $MNPQ$ einander zugeordnet sind.

587. Wenn in einem Nullsysteme den Seiten BCD, ACD, ABD, ABC des Tetraeders $ABCD$ die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ und also den Seiten des letztern die Eckpunkte des erstern zugeordnet sind, die beiden Tetraeder aber keine Kante mit einander gemein haben, so sind dieselben Polartetraeder eines und desselben Polarsystems.

Da nämlich eine Fläche II. Ordnung, welche durch die acht Eckpunkte der Tetraeder $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ geht, aus den Ebenen $DAB, D_1A_1B_1$, eine andere solche Fläche aus den Ebenen $DAC, D_1A_1C_1$ und eine dritte aus den Ebenen $DBC, D_1B_1C_1$ besteht, diese drei Flächen aber nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten, woraus der Satz folgt.

588. Wenn die acht Eckpunkte von zwei Tetraedern $ABCD,$

$MNPQ$, welche nämlich keinen Eckpunkt mit einander gemein haben, in einer und derselben Curve K III. Ordnung liegen, so schmiegen ihre acht Seiten einer und derselben Curve III. Ordnung sich an.

Denn nach 586 sind $ABCD$, $MNPQ$ Polartetraeder eines und desselben Polarsystems. In diesem Systeme aber ist der Curve K ein Ebenenbüschel III. Ordnung zugeordnet, welchem die acht Seiten der Tetraeder angehören.

589. Wenn durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N und die Gerade u nur eine Fläche F II. Ordnung möglich ist und diese Fläche nicht aus zwei Ebenen besteht, so schneidet sie die Ebene uN in der Geraden u und in einer durch den Punkt N gehenden Geraden v , welche man auf folgende Art finden kann:

Geht die Ebene uN durch einen der fünf Punkte A, B, C, D, M , so geht durch diesen auch die Gerade v . — Liegen vier von den fünf Punkten A, B, C, D, M in einerlei Ebene und also in einer Linie II. Ordnung, welche mit der Geraden u eine Linie K III. Ordnung bildet, so ist v diejenige durch den Punkt N gehende Gerade, welche mit der Linie K eine Linie IV. Ordnung bildet. — Findet keiner der betrachteten Fälle statt, so ist (585) in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene uN zugeordnet ist, der Ebene uN ein von N verschiedener Punkt P der Geraden v zugeordnet. Die Ebene uN erscheint in diesem Falle als Träger eines ebenen Polarsystems, in welchem jeder Geraden, die von einer Seite des Tetraeders $ABCD$ die Spur ist, die Projektion des dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunktes aus dem Projektionscentrum M , der Geraden u aber der Punkt P zugeordnet ist.

590. Wenn von den sieben Punkten A, B, C, D, M, N, P keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, $ABCD$ aber ein ebenes Viereck ist, so giebt es ein einfaches Liniensystem I. oder II. Art, welchem nämlich jede Linie II. Ordnung angehört, in der die Ebene MNP von einer durch die sieben gegebenen Punkte gehenden Fläche II. Ordnung geschnitten wird. Es werde die Ebene MNP durch U , der Inbegriff der Ebenen MNP , ABC aber durch E bezeichnet. Es seien ferner E_1, E_2, E_3 drei Flächen II. Ordnung, welche durch sieben gegebenen Punkte gehen und die Ebene U in drei verschiedenen Linien schneiden. Da nun die drei

Flächen F, F_1, F_2 nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so liegt (571) jeder Punkt, welchen die Linie UF_1, UF_2 mit einander gemein haben, auch in der Linie UF_3 . Eben so sind je zwei Punkte, welche in Hinsicht auf die beiden Linien UE_1, UF_2 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die Linie UF_3 einander conjugirt. — Zu jeder Linie K II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht, giebt es eine Linie K_1 , welche dem einfachen Liniensysteme (UF_1, UF_2) angehört und mit der erstern eine Linie IV. Ordnung bildet. Geht die Linie K durch einen der Punkte, in welchen die Ebene ABC die Geraden MN, MP, NP schneidet, so besteht die Linie K_1 aus zwei Geraden.

591. Wenn von den acht Punkten A, B, C, D, M, N, P, Q keine vier in einerlei Ebene liegen, so ist die Ebene U , welche durch die drei Punkte N, P, Q geht, der Träger eines ebenen Polarsystems, in welchem jeder Geraden, die von einer Seite des Tetraeders $ABCD$ die Spur ist, die Projektion des dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunktes aus dem Punkte M zugeordnet ist. Geht nun jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht gegebenen Punkten geht, auch durch den achten, so ist (586) NPQ ein Polardreieck des erwähnten Polarsystems. Wenn aber alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht gegebenen Punkte gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehören und also NPQ kein Polardreieck des Polarsystems ist, so hat man folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Ist in dem Polarsysteme einer Seite NP des Dreiecks NPQ der ihr gegenüberliegende Eckpunkt Q zugeordnet, so schneidet (584) die Ebene U jede Fläche des Systems (F, F_1) in der Geraden NP und in einer durch den Punkt Q gehenden Geraden, daher $U(F, F_1)$ ein Liniensystem VIII. Art ist. — Sind in dem Polarsysteme zwei Seiten NP, NQ des Dreiecks NPQ einander conjugirt, während der Pol N_1 der dritten Seite ausserhalb der beiden erstern liegt, so schneidet die Ebene U eine Fläche des Systems (F, F_1) in den Geraden NP, NQ , eine andere in den Geraden NN_1, PQ , daher $U(F, F_1)$ ein Liniensystem II. Art ist. — Findet keiner der betrachteten Fälle statt, so sind N, P, Q drei Eckpunkte eines vollständigen Vierecks $NPQS$, von welchem je zwei einander gegenüberliegende Seiten in dem Polarsysteme einander conjugirt und zugleich Spuren

von einer Fläche des Flächensystems (F, F_1) sind, daher in diesem Falle $U(F, F_1)$ ein Liniensystem I. Art ist.

592. Wenn durch die neun Punkte $A, B, C, D, M, N, P, Q, R$ nur eine Fläche F II. Ordnung möglich ist und diese mit der Ebene U , welche durch die Punkte N, P, Q geht, eine Linie UF bestimmt, so kann man diese Linie auf folgende Weise finden:

Alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q gehen, gehören einem und demselben einfachen Flächensysteme (F_1, F_2) und eben so alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht Punkte A, B, C, D, N, P, Q, R gehen, einem und demselben andern einfachen Flächensysteme (F_3, F_4) an. Wenn nun irgend eine Fläche des einen oder des andern dieser Systeme aus der Ebene U und noch einer Ebene besteht, so schneiden alle übrigen Flächen desselben die Ebene U in der Linie UF . Wenn aber die Ebene U mit jedem der beiden Flächensysteme ein Liniensystem bestimmt, so ist UF diejenige Linie II. Ordnung, welche die Liniensysteme $U(F_1, F_2), U(F_3, F_4)$ mit einander gemein haben.

§. 40.

Noch einige Sätze über unebene Curven III. Ordnung.

593. Durch ein Tetraeder $ABCD$, dann eine Curve K III. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine Ebene U , welche durch keinen dieser Punkte geht, ist ein einfaches Flächensystem XXII. Art bestimmt, so dass nämlich in Hinsicht auf jede Fläche dieses Systems der gegebenen Ebene ein Punkt der gegebenen Curve und jeder Seite des gegebenen Tetraeders der ihr gegenüberliegende Eckpunkt desselben zugeordnet ist.

Die vier Geraden, in welchen die Ebene U die vier Seiten des Tetraeders $ABCD$ schneidet, sind Tangenten der in 565 durch L bezeichneten Curve II. Ordnung. Diese Curve berührt auch jede in der Ebene U liegende Gerade, welche mit der Curve K zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt. Die Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem I. oder II. oder IV. Art, je nachdem sie die Curve K in

drei Punkten schneidet oder in einem Punkte M schneidet und in einem andern berührt oder mit derselben nur einen Punkt M gemein hat. In den beiden letztern Fällen geht die Curve L durch den Punkt M . In der Ebene U ist zu jedem geraden Gebilde g , welches mit der Curve K keinen Punkt gemein hat, eine Curve K_1 II. Ordnung projektivisch, so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) einander conjugirt sind. Haben die Curven K_1, L vier Punkte mit einander gemein, so schneidet die Gerade g vier der Curve K sich anschmiegende Gerade.

594. Jede Ebene U , welche eine unebene Curve K III. Ordnung in drei Punkten M, N, P schneidet, geht durch die Schnittlinie h von zwei der Curve sich anschmiegenden Ebenen und schneidet den der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel in einer Curve K_1 IV. Ordnung, welche in jedem der drei Punkte M, N, P eine Spitze bildet und die Gerade h in zwei Punkten H, H_1 berührt. Den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel schneidet die Ebene U in einem Strahlenbüschel III. Ordnung, welcher der Curve K_1 sich anschmiegt. Die dieser Curve in den Punkten M, N, P sich anschmiegenden Geraden schneiden sich 484 in einem und demselben vierten Punkte. Wenn die Curve K und die Ebene U reell sind, so sind die Punkte M, N, P entweder alle drei reell oder es ist nur einer derselben reell. Im erstern dieser Fälle sind H, H_1 zwei einander conjugirte imaginäre, im letztern aber zwei reelle Punkte.

Wenn eine unebene Curve K III. Ordnung von einer Ebene U in einem Punkte M geschnitten und in einem andern Punkte N berührt wird, so geht die Ebene U durch einen Strahl n des der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels und schneidet überdiess diesen Büschel in einer Curve K_1 III. Ordnung, welche im Punkte M eine Spitze bildet, während der Punkt N ein Wendepunkt derselben ist. Der der Curve K sich anschmiegende Ebenenbüschel wird wieder von der Ebene U in einem Strahlenbüschel III. Ordnung geschnitten, welcher der Curve K_1 sich anschmiegt.

595. Jede unebene Curve K III. Ordnung wird aus jedem nicht in ihr liegenden Punkte S durch eine Kegelfläche SK III. Ordnung projicirt, der ein Ebenenbüschel III. oder IV. Ordnung sich anschmiegt, je nachdem der Punkt S in einem Strahle s des der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels oder in einer Geraden h liegt,

welche mit der Curve K zwei Punkte H, H_1 gemein hat. Im erstern Falle bildet die Kegelfläche SK in dem Strahle s eine Schneide, während ihr diejenige der Curve K sich anschmiegende Ebene, welche die Gerade s im Punkte S schneidet, in einem Wendestrahle sich anschmiegt. Im letztern Falle ist die Gerade h ein Knotenstrahl der Kegelfläche SK , während in der Ebene, die in dem durch die Curve K bestimmten Nullsysteme dem Punkte S zugeordnet ist, drei Wendestrahlen derselben liegen. Wenn ferner die Curve K und der Punkt S reell sind, so sind H, H_1 entweder zwei reelle oder zwei einander conjugirte imaginäre Punkte. Im erstern dieser Fälle schmiegen der Kegelfläche SK in der Geraden h zwei reelle Ebenen sich an, während nur einer von ihren drei Wendestrahlen reell ist, dagegen im letztern Falle alle drei Wendestrahlen reell sind, die Gerade h aber ein isolirter Strahl der Fläche ist, in welchem nämlich derselben zwei einander conjugirte imaginäre Ebenen sich anschmiegen.

§. 41.

Vermischte Sätze.

596. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, deren jede die Ebene, in der die andere liegt, in zwei ausserhalb der andern liegenden Punkten schneidet, sind (556) zwei andere Curven K_2, K_3 II. Ordnung bestimmt, so dass jede Ebene, welche zwei der vier Curven K, K_1, K_2, K_3 berührt, auch die beiden übrigen berührt und die vier Berührungspunkte in einer und derselben Geraden liegen. Jede Ebene, welche durch eine der vier Curven geht, schneidet die drei übrigen in den sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten jene Curve berühren. Die vier Ebenen U, U_1, U_2, U_3 , in welchen die Curven K, K_1, K_2, K_3 liegen, sind die Seiten eines Tetraeders T von dessen vier Eckpunkten je zwei in Hinsicht auf zwei der vier Curven einander conjugirt sind. Durch jede Ebene V , welche durch keinen Eckpunkt des Tetraeders T geht, ist eine Gerade v bestimmt, welche keine Kante desselben schneidet, so dass

in Hinsicht auf die Curve K der Geraden UV der Punkt Uv , in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden U_1V der Punkt U_1v , in Hinsicht auf die Curve K_2 der Geraden U_2V der Punkt U_2v und in Hinsicht auf die Curve K_3 der Geraden U_3V der Punkt U_3v zugeordnet ist. Jede Regelfläche, in Hinsicht auf welche jeder Seite des Tetraeders T der ihr gegenüberliegende Eckpunkt desselben, der Ebene V aber ein Punkt der Geraden v zugeordnet ist, schmiegt dem durch die Curven K, K_2 bestimmten Ebenenbüschel sich an, welchem nämlich jede Ebene angehört, die die beiden Curven K, K_1 und daher auch die Curven K_2, K_3 berührt.

597. Durch jede reelle Fläche F II. Ordnung, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems aber keine Drehungsfläche ist, sind zwei reelle Curven K, K_1 II. Ordnung bestimmt, so so dass nämlich jede der Fläche F sich anschmiegende Ebene, welche zu sich selbst senkrecht ist und also den unendlich fernen Normalkreis berührt, auch die beiden Curven K, K_1 berührt. Die Ebenen U, U_1 , in welchen die Curven K, K_1 liegen, sind zwei Symmetralebenen der Fläche F und daher zu einander senkrecht. Hat die Fläche F einen Mittelpunkt und also noch eine dritte Symmetralebene, so liegt auch in dieser eine Curve II. Ordnung, welche jede Ebene des durch die beiden Curven K, K_1 bestimmten Ebenenbüschels E berührt, aber imaginär ist. Ferner haben in diesem Falle die Curven UF, K zwei gemeinschaftliche Brennpunkte, welche Scheitelpunkte der Curve K_1 sind, und eben so die Curven U_1F, K_1 zwei gemeinschaftliche Brennpunkte, welche Scheitelpunkte der Curve K sind. Wenn aber die Fläche F keinen Mittelpunkt hat, so sind UF, K, U_1F, K_1 vier Parabeln, von welchen die vierte den gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden ersteren und eben so die zweite den gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden letzteren zum Scheitelpunkt hat.

Zu jeder eigentlichen Ebene V , welche nicht in Hinsicht auf die Fläche F der unendlich fernen Ebene conjugirt ist, ist eine Gerade v senkrecht, die der Ebene V in Hinsicht auf jede dem Ebenenbüschel E sich anschmiegende Fläche II. Ordnung conjugirt ist und durch die beiden Punkte geht, von welchen der eine in Hinsicht auf die Curve K der Geraden UV , der andere aber in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden U_1V zugeordnet ist. Aus jedem Punkte, welcher einer von den beiden Curven K, K_1 angehört, aber

mit der andern nicht in einerlei Ebene liegt, wird die andere durch eine Drehungskegelfläche projicirt, deren Axe der ersteren sich anschmiegt. Eben so ist jede Kegelfläche, welche die Fläche F in einer Curve II. Ordnung berührt und ihren Mittelpunkt in einer von den Curven K, K_1 hat, eine Drehungsfläche. Die Beziehungen, welche diese Curven zur Fläche F haben, haben sie aber auch zu jeder andern reellen Fläche F_1 II. Ordnung, welche dem Ebenenbüschel E sich anschmiegt, daher sowohl UF, UF_1 als auch U_1F, U_1F_1 confocale Curven sind.

598. Durch ein Dreikant abs , dessen dritte Kante s nicht die beiden ersteren unter gleichen Winkeln schneidet, ist eine Kegelfläche K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich auf den Strahlenbüschel S , der in der Ebene ab liegt und den Punkt ab zum Mittelpunkt hat, projektivisch so bezogen werden kann, dass je zwei homologe Strahlen der zu einander projektivischen Gebilde zu einander senkrecht und in Hinsicht auf die Fläche, welche aus den beiden Ebenen as, bs besteht mithin auch in Hinsicht auf jede Kegelfläche II. Ordnung, welche die Ebenen as, bs in den Geraden ab berührt, einander conjugirt sind. In jedem Strahle u der Fläche K schneiden sich zwei Ebenen, von welchen die eine im Punkte S zu einem Strahle u_1 des Büschels S senkrecht, die andere aber demselben Strahle in dem einfachen Flächensysteme $(ab, as + bs)$ conjugirt ist. Jede Kegelfläche F dieses Systems hat drei Axen, welche, weil jede derselben zu dem Strahle des Büschels S , der mit den beiden übrigen in einerlei Ebene liegt, senkrecht und überdiess demselben Strahle in Hinsicht auf die Fläche F conjugirt ist, in der Fläche K liegen.

Bezeichnet man die Ebenen as, bs durch A, B und die Schnittlinie der Ebenen ab, su durch v , so ist $\sin. Au : \sin. Bu = \sin. Av : \sin. Bv$. Nun ist aber $\sin. Av = \sin. av \cdot \sin. sav, \sin. Bv = \sin. bv \cdot \sin. sbv, \sin. av : \sin. bv = \sin. au_1 : \sin. bu_1, \sin. sav : \sin. sbv = \sin. bs : \sin. as$, also auch $\sin. Au : \sin. Bu = \sin. au_1 \cdot \sin. bs : \sin. bu_1 \cdot \sin. as$. Bemerkt man endlich, dass $\sin. uu_1 = 1, \cosin. uu_1 = 0$ und daher $\cosin. au : \cosin. bu = \sin. au_1 : \sin. bu_1$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$\sin. Au : \sin. Bu = \cosin. au \cdot \sin. bs : \cosin. bu \cdot \sin. as.$$

Anmerkung. Gleich wie hier, so ist auch in den noch folgenden Sätzen unter einem Elemente, wenn es nicht ausdrücklich imaginär genannt wird, ein reelles und zwar eigentliches Element und unter einer Fläche eine reelle Fläche zu verstehen.

599. Wenn A, B, C, D vier in einer und derselben Kreislinie K liegende Punkte sind, so hat der Wurf $ABCD$ in der Curve K den Werth $\mp \frac{AD \cdot BC}{AB \cdot CD}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Punkte A, C durch die Punkte B, D getrennt oder nicht getrennt sind.

Es folgt dieser Satz aus 396, wenn man in der Curve K einen beliebigen Punkt S annimmt und bemerkt, dass die Sinusse der Peripheriewinkel ASD, BSC, ASB, CSD sich zu einander verhalten, wie die Sehnen AD, BC, AB, CD . Ist $ABCD$ ein harmonischer Wurf, so ist $AD \cdot BC = AB \cdot CD$. In jedem Falle aber ist (262), wenn die Punkte A, C , durch die Punkte B, D getrennt sind, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

600. In jedem in einen Kreis beschriebenen Sechsecke $ABC A_1 B_1 C_1$, dessen drei Hauptdiagonalen AA_1, BB_1, CC_1 in einem und demselben Punkte sich schneiden, ist das Produkt aus drei Seiten $AB, CA_1, B_1 C_1$, unter welchen keine zwei auf einander folgende sind, dem Produkte aus den drei übrigen Seiten gleich.

Da nämlich $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ eine Involution ist, so ist $A_1 B_1 C_1 A \propto ABC A_1$, demnach $\frac{AA_1 \cdot B_1 C_1}{A_1 B_1 \cdot C_1 A} = \frac{AA_1 \cdot BC}{AB \cdot CA_1}$ und mithin $AB \cdot CA_1 \cdot B_1 C_1 = BC \cdot A_1 B_1 \cdot C_1 A$.

Wenn die Geraden AA_1, BB_1 die durch den Punkt C gehende Tangente des Kreises in einem und demselben Punkte schneiden und also C_1 mit C zusammenfällt, so ist $AB \cdot CA_1 \cdot CB_1 = A_1 B_1 \cdot C A \cdot CB$.

601. Wenn zwei Kugelflächen K, K_1 projektivisch auf einander bezogen sind und in Folge dessen den Punkten A, B, C, D der einen Fläche die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der andern entsprechen, so ist

$$AB \cdot CD : AC \cdot BD : AD \cdot BC = A_1 B_1 \cdot C_1 D_1 : A_1 C_1 \cdot B_1 D_1 : A_1 D_1 \cdot B_1 C_1.$$

Es schneide die Gerade CD die Ebenen, welche die Kugel-
fläche K in den Punkten A, B berühren, in den Punkten P, Q , so ist

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{AD}, \text{ folglich } \frac{PC}{PD} = \frac{AC^2}{AD^2} \text{ und eben so } \frac{QC}{QD} = \frac{BC^2}{BD^2}, \text{ mithin } \frac{AC^2 \cdot BD^2}{AD^2 \cdot BC^2} \text{ der Werth des Wurfes } PDQC.$$

Es schneide ferner die Gerade $C_1 D_1$ die Ebenen, welche die Kugel-
fläche K_1 in den Punkten A_1, B_1 berühren, in den Punkten P_1, Q_1 ,

so ist $\frac{A_1 C_1^2 \cdot B_1 D_1^2}{A_1 D_1^2 \cdot B_1 C_1^2}$ der Werth des Wurfes $P_1 D_1 Q_1 C_1$. Da nun

die Würfe $PDQC, P_1 D_1 Q_1 C_1$ als homologe Würfe von zwei zu
einander collineären räumlichen Systemen einander gleich sind, so

$$\text{ist auch } \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A_1 C_1 \cdot B_1 D_1}{A_1 D_1 \cdot B_1 C_1} \text{ und eben so } \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{A_1 B_1 \cdot C_1 D_1}{A_1 D_1 \cdot B_1 C_1}.$$

§. 42.

Ueber Krümmungen.

602. Die Krümmungen einer Ellipse oder Hyperbel an zwei
verschiedenen Punkten A, B verhalten sich zu einander wie die drit-
ten Potenzen der Abstände, welche die Polaren AS, BS dieser
Punkte vom Mittelpunkte M der Curve haben.

Es seien MP, MQ die aus dem Punkte M auf die Geraden AS, BS gefällten Lothe, so ist $MP : MQ = \sin. MSA : \sin. MSB$. Da
aber die Gerade MS die Strecke AB halbirt, so ist $\sin. MSA : \sin. MSB = SB : SA$, mithin auch $MP : MQ = SB : SA$, woraus
(437) der Satz folgt.

Wenn a, b die halben Axen einer Ellipse oder a, b die hal-
ben Axen einer Hyperbel sind, so ist $\frac{a}{b^2}$ die Krümmung der Curve
an jedem der Scheitelpunkte, deren Polaren vom Mittelpunkte den

Abstand a haben. Die Krümmung der Curve an einem Punkte, dessen Polare vom Mittelpunkte den Abstand d hat, ist also $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{d^3}{a^3} = \frac{d^3}{a^2 b^2}$.

603. Wenn einer Kegelfläche F II. Ordnung im Strahle a die Ebene A sich anschmiegt, so ist auch jeder andern Geraden p , welche in der Ebene A liegt und durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht in Hinsicht auf dieselbe eine durch die Gerade a gehende Ebene P zugeordnet. Die Grenze K , welcher der Quotient $\frac{\sin. AP}{\sin. ap}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern, soll die Krümmung der Kegelfläche F im Strahle a heissen. Werden in der Ebene A noch zwei durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade s, u angenommen und die ihnen in Hinsicht auf die Fläche zugeordneten Ebenen durch S, U bezeichnet, so ist $APSU \propto apsu$, folglich

$$\frac{\sin. AP}{\sin. ap} = \frac{\sin. su \cdot \sin. AS \cdot \sin. PU}{\sin. as \cdot \sin. pu \cdot \sin. SU} \text{ und mithin}$$

$$K = \frac{\sin. su \cdot \sin. AS \cdot \sin. AU}{\sin. as \cdot \sin. au \cdot \sin. SU}.$$

604. Die Krümmungen k, k_1 einer Kegelfläche F II. Ordnung in zwei verschiedenen Strahlen a, b verhalten sich zu einander umgekehrt wie die dritten Potenzen der Sinusse der Winkel, welche diese Strahlen mit der Schnittlinie s der in ihnen der Kegelfläche sich anschmiegenden Ebenen bilden.

Es schneide eine Ebene, welche der Kegelfläche in einem dritten Strahle c sich anschmiegt, die Ebenen ab, as, bs in den Geraden d, u, v , so ist

$$k = \frac{\sin. su \cdot \sin. sab \cdot \sin. sac}{\sin. as \cdot \sin. au \cdot \sin. bac}$$

$$k_1 = \frac{\sin. sv \cdot \sin. sba \cdot \sin. sbc}{\sin. bs \cdot \sin. bv \cdot \sin. abc}$$

Da nun $\frac{\sin. abc}{\sin. bac} = \frac{\sin. ac}{\sin. bc}$ ist, so ist.

$$\frac{\sin. sac. \sin. abc}{\sin. sbc. \sin. bac} = \frac{\sin. sac. \sin. ac}{\sin. sbc. \sin. bc} =$$

$$\frac{\sin. suc. \sin. cu}{\sin. svc. \sin. cv} = \frac{\sin. sv. \sin. cu}{\sin. su. \sin. cv}$$

Da ferner die Geraden u, v durch die Geraden c, d harmonisch

getrennt sind, so ist $\frac{\sin. cu}{\sin. cv} = \frac{\sin. du}{\sin. dv}$, folglich

$$\frac{\sin. cu. \sin. bv}{\sin. cv. \sin. au} = \frac{\sin. du. \sin. bv}{\sin. au. \sin. dv} =$$

$$\frac{\sin. sab. \sin. adu}{\sin. adu. \sin. sba} = \frac{\sin. sab}{\sin. sba}, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sin. su. \sin. sac. \sin. abc. \sin. bv}{\sin. sv. \sin. sbc. \sin. bac. \sin. au} = \frac{\sin. sab}{\sin. sba}$$

Bemerkt man nun noch, dass $\frac{\sin. sab}{\sin. sba} = \frac{\sin. bs}{\sin. as}$ ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{k}{k_1} = \left(\frac{\sin. bs}{\sin. as} \right)^3$$

Wenn ac eine durch die Hauptaxe m der Kegelfläche gehende Symmetralebene derselben und die Ebene mb zur erstern senkrecht ist, so ist $\sin. au = \sin. sac = 1$, folglich

$$k = \frac{\sin. su. \sin. sab}{\sin. as. \sin. bac} = \frac{\text{tg. } su}{\text{tg. } mab} =$$

$$\frac{\text{tg. } bu. \sin. ma}{\text{tg. } mb. \cosin. bus} = \frac{\text{tg. } ma}{\text{tg. } mb^2}$$

und eben so $k_1 = \frac{\text{tg. } mb}{\text{tg. } ma^2}$

Ist nun h ein beliebiger Strahl der Fläche, H die in ihm derselben sich anschmiegende Ebene und t die Gerade, in welcher

diese Ebene die Ebene as schneidet, so ist (598) $\frac{\sin. at}{\sin. ht} =$

$$\frac{\sin. mH. \cosin. ma}{\sin. ma. \cosin. mh} \text{ und mithin } \frac{\sin. mH^3. \sec. mh^3}{\text{tg. } ma^2. \text{tg. } mb^2} \text{ die Krüm-}$$

mung der Kegelfläche im Strahle h . Die Krümmung einer Drehungskegelfläche ist in allen ihren Strahlen von derselben Grösse nämlich der Cotangente des Winkels gleich, den die Axe der Fläche mit jedem Strahle derselben bildet.

605. Wenn eine Fläche F II. Ordnung und eine Gerade g in einem Punkte S sich berühren, so ist in Hinsicht auf die Fläche F dem geraden Gebilde g ein Ebenenbüschel g_1 zugeordnet, dessen Axe g_1 entweder in der Fläche F liegt oder dieselbe im Punkte S berührt, je nachdem nämlich die Fläche F eine Kegelfläche oder keine Kegelfläche ist. In jedem dieser Fälle aber ist, wenn den

Punkten S, P, A, B des geraden Gebildes g die Ebenen S_1, P_1, A_1, B_1 des Büschels g_1 zugeordnet sind, $S_1 P_1 A_1 B_1 \propto SPAB$, folglich

$$\frac{\sin. S_1 P_1}{SP} = \frac{AB \cdot \sin. S_1 A_1 \cdot \sin. P_1 B_1}{SA \cdot PB \cdot \sin. A_1 B_1}$$

Die Grenze, welcher der Quotient $\frac{\sin. S_1 P_1}{SP}$ sich nähert, wenn sein

Dividend und sein Divisor der Null sich nähern, soll, da ihr Werth durch die Fläche F und die Gerade g bestimmt ist, durch (F, g) bezeichnet werden. Es ist hiernach

$$(F, g) = \frac{AB \cdot \sin. S_1 A_1 \cdot \sin. S_1 B_1}{SA \cdot SB \cdot \sin. A_1 B_1}$$

Jede Ebene U , welche durch die Gerade g aber nicht durch die Gerade g_1 geht, also die Ebene P_1 in einer andern Geraden p schneidet, schneidet die Fläche F in einer Curve UF II. Ordnung.

Da nun

$$\frac{\sin. gp}{SP} : \frac{\sin. S_1 P_1}{SP} = \sin. gp : \sin. S_1 P_1 = \sin. gg_1 : \sin. UP_1$$

ist, so ist, wenn man die Krümmung der Curve UF im Punkte S durch k bezeichnet,

$$k : (F, g) = \sin. gg_1 : \sin. US_1.$$

Ist also die Ebene U zur Ebene gg_1 senkrecht, so ist $k = (F, g) \cdot \sin. gg_1$.

606. Wenn eine Kegelfläche F II. Ordnung, deren Mittelpunkt M ist, von einer Geraden g im Punkte A berührt wird und die Kegelfläche in dem Strahle a , welcher durch den Punkt A geht, die Krümmung k hat, so ist $(F, g) = \frac{k \cdot \sin. ag}{MA}$.

Es sei P irgend ein von A verschiedener Punkt der Geraden g . Bezeichnet man nun die Ebene ag durch A_1 , die Gerade MP durch p und die dem Punkte P und daher auch der Geraden p in Hinsicht auf

die Fläche F zugeordnete Ebene durch P_1 , so ist $\frac{\sin. A_1 P_1}{AP} =$
 $\frac{\sin. A_1 P_1}{\sin. ap} \cdot \frac{\sin. ap}{AP} = \frac{\sin. A_1 P_1}{\sin. ap} \cdot \frac{\sin. ag}{MP}$, woraus der Satz
 folgt.

607. Wenn einer Curve K II. Ordnung im Punkte A die Gerade g sich anschmiegt, so schmiegt der Kegelfläche F , welche die Curve K aus dem Punkte M projicirt, in der Geraden a , welche diesem Punkt mit dem Punkte A verbindet, die Ebene Mg sich an. Ist nun k die Krümmung der Curve K im Punkte A , k_1 die Krümmung der Kegelfläche F im Strahle a und d der Abstand des Punktes M von der Ebene K , so ist $dk = k_1 \sin. ag^3$.

Da nämlich $\frac{d}{MA \sin. ag}$ der Sinus des Winkels ist, welchen die Ebene Mg mit der Ebene K bildet, so ist (605) $\frac{dk}{MA \sin. ag^2} = (F, g)$. Nun ist aber nach dem vorigen Satze $(F, g) = \frac{k_1 \sin. ag}{MA}$, woraus der Satz sich ergibt.

Ist F eine Drehungskegelfläche und w der Winkel, welchen die Axe der Fläche mit jedem Strahle derselben bildet, so ist $k_1 = \cotg. w$ und folglich $k = \frac{\sin. ag^3}{d \cdot \tg. w}$. Das Produkt $d \cdot \tg. w$ ist, wie aus 437 und 596 hervorgeht, aber auch ausserdem leicht nachgewiesen werden kann, dem halben Parameter der Curve K gleich.

608. Wenn die Geraden g, g_1, h, h_1 die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems in einem und demselben Punkte A berühren, so dass überdiess in Hinsicht auf die Fläche der Geraden g die Gerade g_1 und der Geraden h die Gerade h_1 zugeordnet ist, so ist

$$(F, g) : (F, h) = \sin. gh_1 : \sin. hg_1 \text{ und}$$

$$(F, g) : (F, g_1) = \sin. gh \sin. gh_1 : \sin. g_1 h \sin. g_1 h_1.$$

Es seien u, u_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, von welchen die eine u die Geraden g, h in zwei verschiedenen Punkten P, Q und also die andere u_1 die Ebene gh im Punkte A schneidet, so ist

$$\frac{\sin. h_1 g_1 u_1}{AP} : \frac{\sin. g_1 h_1 u_1}{AQ} = \frac{\sin. h_1 g_1 u_1}{\sin. g_1 h_1 u_1} : \frac{AP}{AQ} =$$

$$\frac{\sin. h_1 u_1}{\sin. g_1 u_1} : \frac{\sin. h u}{\sin. g u}$$

Lässt man nun die Geraden u, u_1 sich bewegen und dann u mit g_1 und u_1 mit g zusammenfallen, so erhält man die Gleichung

$$(F, g) : (F, h) = \sin. g h_1 : \sin. h g_1.$$

Eben so ist $(E, g_1) : (F, h) = \sin. g_1 h_1 : \sin. h g$, demnach

$$(F, g) : (F, g_1) = \sin. g h. \sin. g h_1 : \sin. g_1 h. \sin. g_1 h_1.$$

Legt man durch den Punkt A noch zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade v, v_1 , so ist $g g_1 h v \propto g_1 g h_1 v_1$ und also

$$\frac{\sin. g v}{\sin. g_1 v_1} = \frac{\sin. g h_1 . \sin. v h}{\sin. g_1 h_1 . \sin. v_1 h_1}$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{\sin. g h . \sin. g h_1}{\sin. g_1 h . \sin. g_1 h_1}$ und folglich auch

$\frac{(F, g)}{(F, g_1)}$ die Grenze ist, welcher der Quotient $\frac{\sin. g v}{\sin. g_1 v_1}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern.

609. Durch eine Fläche F II. Ordnung und zwei Gerade g, g_1 , welche die Fläche in einem und demselben Punkte A berühren und zugleich in Hinsicht auf dieselbe einander zugeordnet sind, sind zwei Grössen $(F, g), (F, g_1)$ bestimmt, deren Produkt schon durch die Fläche F und den Punkt A bestimmt ist und daher durch (F, A) bezeichnet werden soll. Sind nämlich h, h_1 irgend zwei andere durch den Punkt A gehende und in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, so ist (608)

$$(F, g) : (F, h) = \sin. g h_1 : \sin. h g_1 \text{ und ebenso}$$

$$(F, g_1) : (F, h_1) = \sin. g_1 h : \sin. h_1 g, \text{ folglich}$$

$$(F, g) . (F, g_1) = (F, h) . (F, h_1).$$

Nach dem Vorigen ist nun auch $(F, A) =$

$$\frac{(F, g) . (F, h) . \sin. g_1 h_1}{\sin. g h} = \frac{(F, g)^2 . \sin. g_1 h . \sin. g_1 h_1}{\sin. g h . \sin. g h_1}.$$

610. Wenn in Hinsicht auf eine Regelfläche F , welche durch die Gerade s geht, den Punkten A, B, C dieser Geraden die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind, so ist

$$(E, A) = \left(\frac{BC \cdot \sin. A_1 B_1 \cdot \sin. A_1 C_1}{AB \cdot AC \cdot \sin. B_1 C_1} \right)^2$$

Es seien g, g_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, welche durch den Punkt A gehen und also in der Ebene A_1 liegen. Es seien ferner u, u_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, von welchen die eine u die Geraden g, s in zwei Punkten P, S schneidet und also die andere u_1 die Schnittlinie der diesen Punkten zugeordneten Ebenen P_1, S_1 ist, so hat man die Gleichungen

$$\frac{\sin. A_1 P_1}{AP} : \frac{\sin. A_1 S_1}{AS} = \frac{\sin. A_1 P_1}{\sin. A_1 S_1} : \frac{AP}{AS} = \frac{\sin. su_1}{\sin. g_1 u_1} : \frac{\sin. su}{\sin. gu}$$

$$\frac{\sin. A_1 S_1}{AS} = \frac{BC \cdot \sin. A_1 B_1 \cdot \sin. S_1 C_1}{AB \cdot SC \cdot \sin. B_1 C_1}$$

Lässt man nun u mit g_1 und also u_1 mit g zusammenfallen, so folgt, dass

$$\frac{\sin. sg_1}{\sin. sg} \cdot (F, g) = \frac{BC \cdot \sin. A_1 B_1 \cdot \sin. A_1 C_1}{AB \cdot AC \cdot \sin. B_1 C_1}$$

die Grenze ist, welcher der Quotient $\frac{\sin. A_1 S_1}{AS}$ sich nähert, wenn

sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern. Eben so ist

$$\frac{\sin. sg}{\sin. sg_1} \cdot (F, g_1) = \frac{BC \cdot \sin. A_1 B_1 \cdot \sin. A_1 C_1}{AB \cdot AC \cdot \sin. B_1 C_1}$$

Bemerkt man nun noch, dass $(F, A) = (F, g) \cdot (F, g_1)$ ist, so folgt der obige Satz. Aus dem Beweise ergibt sich noch die Gleichung:

$$(F, g) : (F, g_1) = \sin. sg^2 : \sin. sg_1^2.$$

611. Wenn in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche durch den Punkt A geht und die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, dem Punkte A die Ebene A_1 zugeordnet ist und man auf jeden Punkt P dieser Ebene diejenige durch den Punkt A gehende Gerade p bezieht, welche zu der dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordneten Ebene senkrecht ist, so sind das ebene System A_1 und der Strahlenbündel A projektivisch so auf einander bezogen, dass jedem in der Ebene A_1 liegenden Dreiecke APQ , von welchem A ein Eckpunkt ist, ein Dreikant apq entspricht, dessen eine Kante a die zur Ebene A_1 im Punkte A senkrechte Gerade a ist. Dem Umfange des Dreiecks APQ entspricht der Mantel des

Dreikants apq . Jede Kugelfläche K , welche den Punkt A zum Mittelpunkt hat, schneidet das Dreikant apq in zwei einander gleichen sphärischen Dreiecken. Bezeichnet man nun den Inhalt des Dreiecks APQ durch $\triangle$, den Halbmesser der Kugelfläche K durch r und den Inhalt eines der erwähnten sphärischen Dreiecke durch $\triangle_1$, so ist

der Werth des Quotienten $\frac{\triangle}{r^2}$ und also auch der Werth des Quotienten

$\frac{\triangle_1}{r^2 \triangle}$ von der Grösse des Halbmessers r unabhängig, die Grenze aber

welcher der Werth des letztern Quotienten sich nähert, wenn die Seite der Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$ der Null sich nähern, ist, wie aus den beiden letztern Nummern hervorgeht, $= (F, A)$. Hat die Fläche F mit keiner (reellen) Geraden mehr als zwei Punkte gemein, so heisst die Grösse (F, A) die Krümmung der Fläche F im Punkte A .

Legt man durch die Gerade a zwei Ebenen U , U_1 , welche die Ebene A_1 in zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordneten Geraden g , g_1 schneiden, und bezeichnet man durch k , k_1 die Krümmungen der Curven UF , U_1F am Punkte A , so ist nach 604

$$(F, g) = \frac{k}{\sin. g g_1}, (F, g_1) = \frac{k_1}{\sin. g g_1} \text{ und demnach } (F, A) = \frac{k k_1}{\sin. g g_1^2}.$$

612. Wenn die vier Geraden g , g_1 , h , h_1 eine Fläche F II. Ordnung in einem und demselben Punkte A berühren und überdiess in Hinsicht auf die Fläche der Geraden g die Gerade g_1 und der Geraden h die Gerade h_1 zugeordnet ist, so ist (608)

$$(F, g) : (F, h) = \sin. g h_1 : \sin. g_1 h$$

Es seien nun U , U_1 , U_2 die zur Ebene gh in den Geraden g , g_1 , h senkrechten Ebenen und k , k_1 , k_2 die Krümmungen der Curven UF , U_1F , U_2F im Punkte A , so ist (604)

$$k \sin. h h_1 : k_2 \sin. g g_1 = (F, g) : (F, h) = \sin. g h_1 : \sin. g_1 h, \text{ also}$$

$$k \sin. g_1 h^2 : k_2 \sin. g g_1^2 = \sin. g h_1 \cdot \sin. g_1 h : \sin. g g_1 \cdot \sin. h h_1 \text{ und eben so}$$

$$k_1 \sin. g h^2 : k_2 \sin. g g_1^2 = \sin. g_1 h_1 \cdot \sin. g h : \sin. g g_1 \cdot \sin. h h_1, \text{ mithin}$$

$$k \sin. g_1 h^2 : k_1 \sin. g h^2 : k_2 \sin. g g_1^2 = \sin. g_1 h : \sin. g h_1 : \sin. g h : \sin. g_1 h_1 : \sin. g g_1 : \sin. h h_1.$$

Weil ferner entweder das erste oder das zweite oder das dritte von den drei Produkten rechter Hand der Summe der beiden übrigen gleich ist, je nachdem nämlich die Geraden g_1, h durch die Geraden g, h_1 oder die Geraden g, h durch die Geraden g_1, h_1 oder die Geraden g, g_1 durch die Geraden h, h_1 getrennt sind, so ist im ersten dieser drei Fälle

$$k_2 \sin. g g_1^2 = k \sin. g_1 h^2 - k_1 \sin. g h^2, \text{ im zweiten aber}$$

$$k_2 \sin. g g_1^2 = k_1 \sin. g h^2 - k \sin. g_1 h^2 \text{ und im dritten}$$

$$k_2 \sin. g g_1^2 = k \sin. g_1 h^2 + k_1 \sin. g h^2.$$

Sind die Geraden g, g_1 , was nun angenommen werden soll, zu einander senkrecht, so ist im dritten Falle, in welchem die Fläche F mit keiner (reellen) Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, k, k_1 die Krümmung der Fläche F im Punkte A und

$$k_2 = k \cosin. gh^2 + k_1 \sin. gh^2$$

mithin entweder k_2 ein Mittel zwischen k und k_1 oder $k = k_1 = k_2$.

613. Wenn in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche in den Eckpunkten A, B des Tetraders $ABCD$ die Kanten AC, BC desselben berührt, diesen Kanten die Kanten AD, BD zugeordnet sind und man die Längen der aus den Punkten A, B auf die Kante CD gefällten Lothe durch m, n bezeichnet, so ist

$$(F, AC) : (F, BC) = n^2 \cdot BC \cdot AD : m^2 \cdot AC \cdot BD$$

Die Ebene ABC schneidet die Fläche F in einer Curve II. Ordnung. Bezeichnet man die Krümmungen dieser Curve in den Punkten A, B durch k, k_1 , so ist (604)

$$(F, AC) = \frac{k \cdot \sin. \overline{BACD}}{\sin. CAD}, \quad (F, BC) = \frac{k_1 \cdot \sin. \overline{ABCD}}{\sin. CBD}$$

Bemerkt man nun, dass (437)

$$k : k_1 = BC^3 : AC^3$$

$$\sin. CBD : \sin. CAD = n \cdot AC \cdot AD : m \cdot BC \cdot BD \text{ und}$$

$$\sin. \overline{BACD} : \sin. \overline{ABCD} = \sin. BCD : \sin. ACD = n \cdot AC : m \cdot BC$$

ist, so folgt der Satz.

614. Wenn die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems die eine u von zwei einander zugeordneten Geraden in zwei Punkten

A, B schneidet, welche von der andern u_1 die Abstände m, n haben, so ist

$$(F, A) : (F, B) = n^4 : m^4$$

Sind nämlich C, D irgend zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirte Punkte der Geraden u_1 , so (612)

$$(F, AC) : (F, BC) = n^2 \cdot BC \cdot AD : m^2 \cdot AC \cdot BD$$

$$(F, AD) : (F, BD) = n^2 \cdot BD \cdot AC : m^2 \cdot AD \cdot BC$$

woraus (608) der Satz folgt.

Die Krümmungen einer durch keine reelle Gerade gehenden Fläche II. Ordnung in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich also umgekehrt wie die vierten Potenzen der Abstände, welche diese Punkte von der Schnittlinie ihrer Polaren haben.

615. Die Krümmungen eines Ellipsoids oder eines zweischaligen Hyperboloids in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich wie die vierten Potenzen der Abstände, welche die Polaren As, Bs dieser Punkte vom Mittelpunkte M der Fläche haben.

Es seien m, n die Abstände der Punkte A, B von der Geraden s und MP, MQ die aus dem Punkte M auf die Ebenen As, Bs gefällten Lothe. Da nun die Ebene Ms die Strecke AB halbt, so ist $n : m = \sin. AsM : \sin. BsM = MP : MQ$, woraus (614) der Satz sich ergibt.

Sind a, b, c die halben Axen eines Ellipsoids oder a, bi, ci die halben Axen eines zweischaligen Hyperboloids, so ist

$$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} \text{ die Krümmung der Fläche an jedem der Scheitel-}$$

punkte, deren Polaren vom Mittelpunkte den Abstand a haben. Die

Krümmung der Fläche in einem Punkte, dessen Polare vom Mittel-

$$\text{punkte den Abstand } d \text{ hat, ist also } \frac{a^2}{b^2 c^2} \cdot \frac{d^4}{a^4} = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}.$$
 Eben

so ist, wenn a, b, ci die halben Axen eines einschaligen Hyperboloids F sind, und d den Abstand bezeichnet, welchen die Polare eines Punktes D der Fläche vom Mittelpunkte derselben hat, (F, D)

$$= \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

616. Die Krümmungen eines elliptischen Paraboloids in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich zu einander wie die vier-

ten Potenzen der Sinusse der Winkel α, β , unter welchen die Polaren $A s, B s$ jener Punkte die Axe der Fläche schneiden.

Es seien m, n die Abstände der Punkte A, B von der Geraden s . Da nun die Richtung, welche die Axe der Fläche hat, in der Ebene $N s$ enthalten ist, welche die Gerade s mit dem Mittelpunkte N der Strecke $A B$ verbindet, so ist $\sin. \alpha : \sin. \beta = \sin. A s N : \sin. B s N = n : m$, woraus (614) der Satz folgt. Ist also K die Krümmung der Fläche in ihrem Scheitelpunkte, so ist $K \sin. \alpha^4$ ihre Krümmung im Punkte A .

Die Krümmungen einer durch keine reelle Fläche II. Ordnung in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich also umgekehrt wie die vierten Potenzen der Abstände, welche diese Punkte von der Schnittlinie ihrer Polaren haben.

615. Die Krümmungen eines Ellipsoids oder eines zweischaligen Hyperboloids in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich wie die vierten Potenzen der Abstände, welche die Polaren $A s, B s$ dieser Punkte vom Mittelpunkte M der Fläche haben.

Es seien m, n die Abstände der Punkte A, B von der Geraden s und $M P, M Q$ die aus dem Punkte M auf die Ebenen $A s, B s$ ge-
fallenen Loths. Da nun die Ebene $M s$ die Strecke $A B$ halbirte, so ist
 $n : m = \sin. A s M : \sin. B s M = M P : M Q$, woraus (614) der
Satz sich ergibt.

Sind a, b, c die halben Axen eines Ellipsoids oder $a, b, c i$ die halben Axen eines zweischaligen Hyperboloids, so ist
 $\frac{a^2}{b^2 c^2} : \frac{b^2}{a^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} : \frac{b^2}{a^2 c^2}$ die Krümmung der Fläche an jedem der Scheitel-

punkte, deren Polaren vom Mittelpunkte den Abstand a haben. Die
Krümmung der Fläche in einem Punkte, dessen Polare vom Mittel-

punkte den Abstand d hat, ist also $\frac{a^2}{b^2 c^2} \cdot \frac{d^4}{a^4} = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}$. Eben

so ist, wenn $a, b, c i$ die halben Axen eines einschaligen Hyper-
boloids F sind, und d den Abstand bezeichnet, welchen die Polare
eines Punktes D der Fläche vom Mittelpunkte derselben hat, (F, D)

$\frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}$

616. Die Krümmungen eines elliptischen Paraboloids in zwei
verschiedenen Punkten A, B verhalten sich zu einander wie die vier-

Staudt, Karl Georg Christian <<von>>,

Beiträge zur Geometrie der Lage

Bd.: 3

Nürnberg 1860

Math.p. 540 n-1/3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082878-9